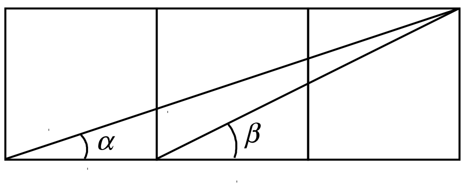
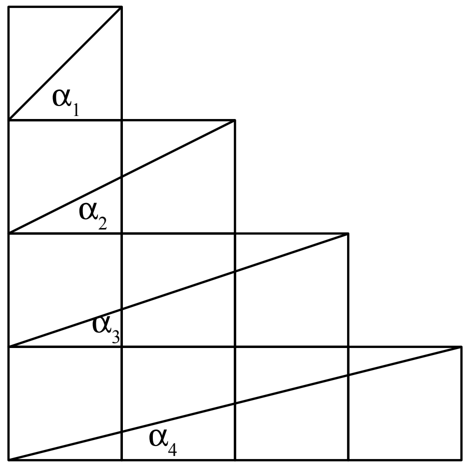
Titre : Les remarquables triplets d'angles.





Degré : 11CO

Une version plus complète pour le P.O. se trouve dans un autre fichier.

Durée : 45 minutes.

<u>Résumé :</u>

Prenez le dessin de gauche ci-dessus, constitué de la juxtaposition de trois carrés.

La trigonométrie permet facilement de déterminer la somme des deux angles : $\alpha+\beta$.

Il existe également une méthode géométrique pour trouver cette somme, qui vaut 45°.

On a donc : $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$.

Une question naturelle pour un mathématicien est de se demander si une telle autre relation existe pour les angles α_k dont on voit les définitions ci-dessus.

Une réponse complète à cette question mène à des problèmes diophantiens de niveau universitaire.

Des questions intermédiaires peuvent s'adresser à des élèves du post-obligatoire.

Chaque fois, la trigonométrie permet de trouver des relations similaires entre trois angles α_k, ainsi que des approches géométriques.

Donc la notion d'arc-tangente est la principale notion à utiliser, ainsi que des considérations de géométrie élémentaire.

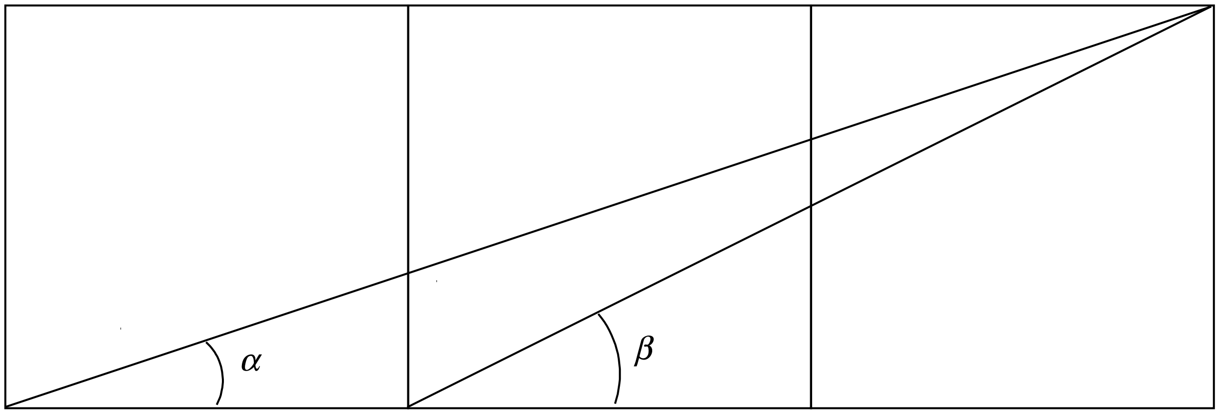
Un atout de cette activité est qu'il y a des listes illimitées de remarquables triplets d'angles et que seul un niveau universitaire peut tous les cataloguer. Donc la recherche au niveau du collège est illimitée.

Elle peut donc être abordée expérimentalement à l'école primaire et au C.O., pour être étudiée en profondeur à l'université.

Au niveau du C.O., on se limitera à la première question de la somme $\alpha+\beta$ = ?.

Cette activité est proposée dans les MERM "Grandeurs et mesures, Analyse de données", activité 165, page 74.

Les remarquables triplets d'angles

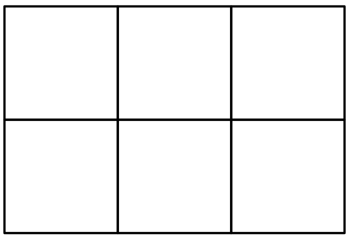


a) Prends le dessin ci-dessus, constitué de la juxtaposition de trois carrés.

Détermine la somme des deux angles : $\alpha + \beta$.

b) Vérifie par une méthode géométrique que tu obtiens bien le même résultat que celui obtenu en mesurant simplement ces deux angles au rapporteur.

Le quadrillage suivant peut t'être utile.



Titre : Les remarquables triplets d'angles

Degré : 11^{e} Harmos.

Prérequis :
Des approches de géométrie élémentaire, utilisant la notion de triangles semblables, sont possibles. On peut débuter par des mesures d'angles au rapporteur.

Objectifs :
Ce problème est une curiosité. La base peut être abordé à l'école primaire, en traçant des angles et en les mesurant avec un rapporteur. Ensuite, il peut être abordé au niveau du cycle d'orientation, en leur faisant dessiner des constructions géométriques et raisonner sur des triangles semblables. Au niveau du post-obligatoire, la trigonométrie intervient dans les résolutions. Au niveau universitaire, une généralisation de ce problème mène à des équations diophantiennes, donc cherchant des solutions dans les nombres entiers.
En résumé, cette activité mène à utiliser des rapporteurs, de la géométrie élémentaire, la similitude de triangles et une généralisation pour le P.O. mène à la trigonométrie et plus si on est très curieux.

Matériel :
De quoi écrire, des feuilles de papier quadrillé et une règle sont indispensables. Un rapporteur et une calculatrice sont souhaitables.
On peut imprimer sur des acétates, des rapporteurs se trouvant dans les fichiers : Rapporteur.odg et Rapporteur.pdf, puis les faire découper par ceux qui veulent.

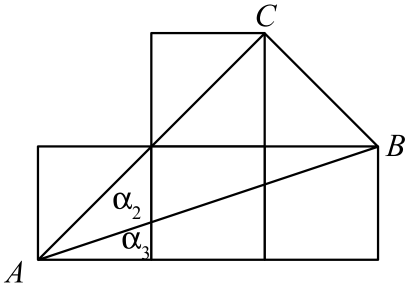
Durée estimée :
45 minutes ou moins si les élèves sont guidés au départ.

<u>Analyse à priori de l'activité :</u>

Une première approche possible est de mesurer les angles α et β, pour constater que leur somme fait 45°.
L'approche géométrique sera plus difficile à trouver. Il faut peut-être guider les élèves sur le quadrillage à faire pour obtenir les bons triangles et la somme désirée.

Résolution.

Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ de manière géométrique.



ABC est un triangle rectangle, dont le côté [*AC*] et deux fois plus long que le côté [*BC*], il est donc semblable au triangle définissant l'angle α_2 ce qui justifie que l'angle *CAB* vaut α_2.

Le dessin montre donc que $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 = 45°$.

Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ à l'aide de la trigonométrie, ainsi que beaucoup d'autres formules.

De manière générale, les angles sont définis par la relation $\alpha_k = \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$.

On a : $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 \approx 26{,}56505°$; $\alpha_3 \approx 18{,}43495°$; $\alpha_4 \approx 14{,}03624°$

$\alpha_5 \approx 11{,}30993°$; $\alpha_6 \approx 9{,}46232°$; $\alpha_7 \approx 8{,}13010°$

Une relation $\alpha_k = \alpha_m + \alpha_n$ s'écrit donc : $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{m}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

En prenant la tangente de chaque membre de l'égalité, cela devient :

$$\frac{1}{k} = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{m}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{n}}$$

La dernière égalité s'obtient par la formule de la tangente d'une somme d'angles.

Le tout se ramène à : $k \cdot m + k \cdot n + 1 = m \cdot n$ ou à : $n = \frac{k \cdot m + 1}{m - k}$.

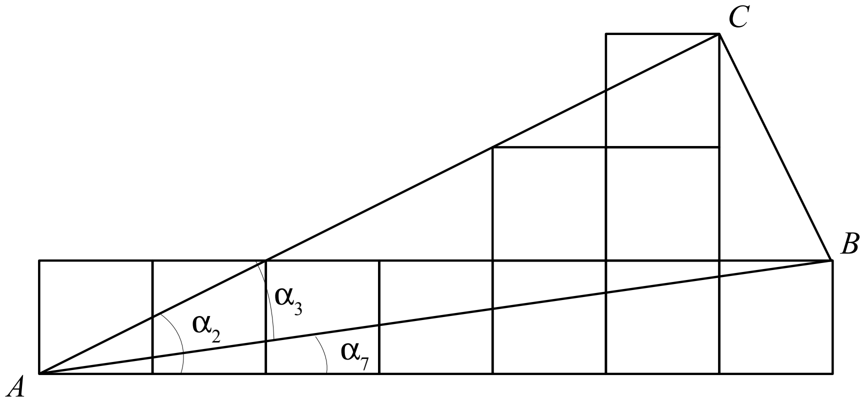
L'égalité $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$, est confirmée par l'égalité suivante :

$$\frac{1}{1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}},$$ k = 1 ; m = 2 et n = 3.

Empiriquement on constate que $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_7$, ce qui se confirme en constatant que :

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{7}},$$ k = 2 ; m = 3 et n = 7.

Montrons que $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_7$ de manière géométrique.



ABC est un triangle rectangle, dont le côté [*AC*] est trois fois plus long que le côté [*BC*], il est donc semblable au triangle définissant l'angle α_3 ce qui justifie que l'angle *CAB* vaut α_3.
Le dessin montre donc que $\alpha_3 + \alpha_7 = \alpha_2$.

On a vu que : $n = \frac{k \cdot m+1}{m-k}$, donc $n = \frac{k\cdot(k+d)+1}{d} = k+\frac{k^2+1}{d}$ où d = m - k.

Dans le cas particulier où $m = k + 1$, (d = 1) on a : $n = k^2+k+1$.

Dans le cas particulier où $m = k + 2$, (d = 2) et $k = 2 \cdot j + 1$ est impair, on a : $n = 2\cdot(j+1)^2$.
Si $m = k + 3$, (d = 3), il n'y a aucune valeur entière de n possible.

Voici des tableaux de valeurs

k	*m=k+1*	*n*		*k*	*m=k+2*	*n*		*k*	*m*	*n*
1	2	3		3	5	8		7	12	17
2	3	7		5	7	18		8	13	21
3	4	13		7	9	32		12	17	41
4	5	21		9	11	50		13	18	47
5	6	31		11	13	72		17	22	75
6	7	43		13	15	98		18	23	83
7	8	57		15	17	128		etc.		
8	9	72		etc.						
9	10	91								
10	11	111								
11	12	133								

Le problème général revient à déterminer les valeurs de k et de d telles que :
$k^2 \equiv -1 \bmod d$.

Il n'y a pas de solutions pour d dans { 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; ??? }
Il y a des solutions pour d dans { 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 13 ; ??? }