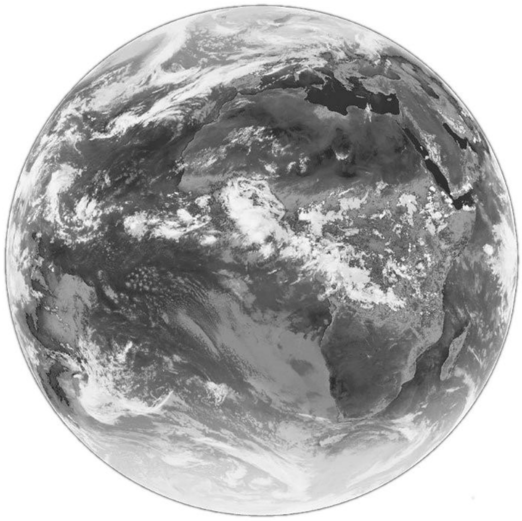
Titre : Où se trouve l'Horizon ?



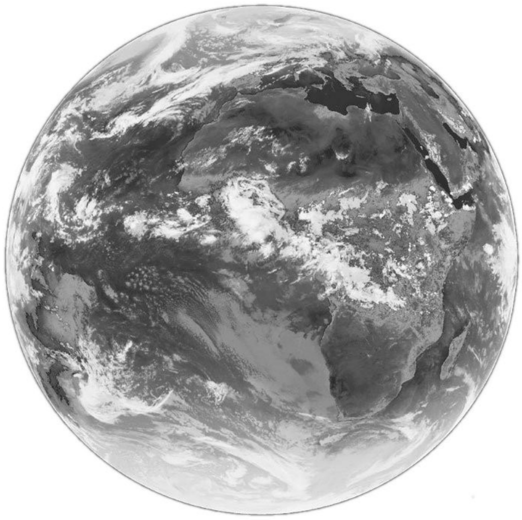
Degré : 11^{e} LS ; école de culture générale.
Une version pour la 1ère du collège se trouve dans un autre fichier.

Durée : 45 minutes ou 95 minutes, selon l'objectif.

Résumé :
Cette activité traite le cas concret de la question : "Comment varie la distance entre l'observateur et l'horizon en fonction de la hauteur au-dessus du sol de l'observateur ?" C'est un cas simple de relation *non proportionnelle* entre deux grandeurs.

La principale notion mathématique utilisée dans cette activité est le théorème de Pythagore. Il faut savoir calculer une racine carrée avec la calculatrice, savoir tracer le graphique d'une grandeur en fonction d'une autre et connaître les conditions à satisfaire pour que deux grandeurs soient proportionnelles.
L'utilisation du calcul littéral est souhaitable.
Une difficulté est de poser correctement le problème.
Un dessin de la situation s'imposera pour s'orienter vers une solution.

Où se trouve l'Horizon ?



La question à laquelle on désire répondre est :
"A quelle distance de l'observateur se trouve l'horizon ?"

Pour cette activité, on approximera la Terre comme une sphère de Rayon :
$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ [m].
Cela est raisonnable, si on se trouve sur une mer calme, ou sur une de ses plages.

a) Montrez que si vos yeux se trouvent à h = 1,00 mètre au-dessus du sol, l'horizon apparaît à L = 3,57 [km] de distance (à moins de 0,01 [km] près).

b) A quelle distance L apparaît l'horizon si vos yeux se trouvent à h = 2,00 mètres au-dessus du sol ?

c) A quelle distance L apparaît l'horizon si vos yeux se trouvent à h = 3,00 mètres au-dessus du sol ?

d) A quelle distance L apparaît l'horizon si vos yeux se trouvent à h = 4,00 mètres au-dessus du sol ?

e) Y a-t-il proportionnalité entre la distance L et la hauteur h ? Justifiez votre réponse.

f) Tracez sur une page entière, le graphique de la distance L en fonction de la hauteur h de vos yeux, pour h variant entre 0 et 50 mètres.
Une formule générale, donnant la distance L de l'horizon, en fonction de la hauteur h de vos yeux au-dessus du sol est utile, pour ne pas répéter les mêmes calculs.

g) Que vaut h pour que $L = 10{,}0$ kilomètres ?
Comment avez-vous trouvé votre réponse ?

Titre : Où se trouve l'Horizon ?

Degrés : 11^{e} LS

Prérequis :
La principale notion mathématique utilisée dans cette activité est le théorème de Pythagore. Il faut savoir calculer une racine carrée avec la calculatrice, savoir tracer le graphique d'une grandeur en fonction d'une autre et connaître les conditions à satisfaire pour que deux grandeurs soient proportionnelles.
L'utilisation du calcul littéral est souhaitable.

Objectifs :
Ce problème traite d'un cas concret dans le "macro-espace", c'est-à-dire dans le monde qui nous entoure. Il nécessite donc une modélisation de la Terre par un disque sur une feuille de papier. Ensuite, il montre une utilisation concrète du théorème de Pythagore.
Les élèves devront être capable de modéliser la Terre par un disque, d'utiliser le théorème de Pythagore, de calculer une racine carrée à l'aide de la calculatrice et de tracer un graphique, en observant qu'il montre que les deux grandeurs en jeux sont non-proportionnelles.

Matériel :
De quoi écrire, des feuilles de papier et une calculatrice sont indispensables. Il est utile qu'au moins une feuille soit quadrillée ou millimétrée. Un compas et une règle sont souhaitables.

Durée estimée :
Une partie de l'activité peut se faire en 45 minutes ou moins si les élèves sont guidés au départ.
Elle peut se faire en 95 minutes, par groupes de 2 élèves, si on leur demande un rapport écrit à la fin.

Proposition de déroulement pour le collège :
Annoncer un cours à l'avance qu'une activité de 95 minutes à réaliser par groupes de deux élèves aura lieu le cours suivant, avec un rapport écrit à rendre à la fin. Il est conseillé d'annoncer qu'il sera noté. Cela stresse un peu les élèves, mais cela les stimule et comme la note est souvent bonne, ils terminent avec une belle satisfaction.
*Indiquer qu'un **compas**, une **règle** et une **calculatrice** seront nécessaires, ainsi que de quoi écrire. Ils doivent avoir des feuilles et au moins une **feuille quadrillée** pour tracer un graphique.*
Le jour de l'activité, distribuer la feuille d'énoncé à chaque élève. Les laisser 5 minutes seuls face au problème, pour qu'ils le lisent et imaginent des pistes de départ.
Ensuite, laisser les groupes se former et laisser les élèves attaquer le problème. Passer auprès des groupes régulièrement, les écouter, mais ne pas trop les aider. Leur suggérer de faire un dessin de la situation, s'il n'est pas fait spontanément.
Dire que l'image de la Terre est utile et que les rayons de lumière se déplacent en ligne droite.
Rappeler après 45 minutes qu'un rapport écrit est demandé et les inciter à commencer la rédaction des résultats partiels.
Résumer les résultats principaux dans la conclusion, avec des phrases en français est souhaitable.

Analyse à priori de l'activité :
La grosse difficulté pour les élèves sera de faire un dessin correct de la situation. Il faudra leur demander de faire un dessin et de tracer "le" rayon de lumière qui va de l'horizon vers les yeux de l'observateur. Parfois, il faudra les aider en indiquant que ce rayon de lumière est perpendiculaire au rayon de la Terre à l'horizon.
On peut aussi leur dire que le dessin de la Terre en début d'énoncé est censé les aider.
L'application du théorème de Pythagore ne posera pas de problèmes.

Ensuite, la résolution de l'équation peut faire apparaître l'erreur classique de supprimer tous les carrés et passer de $L^2 + R^2 = (R + h)^2$ à $L + R = (R + h)$. Mais ils devraient se rendre compte que le résultat L = h est faux.

L'écriture sous forme littérale de la formule donnant L en fonction de h est utile, mais pas indispensable. Cette activité montre naturellement l'avantage d'une formule générale sur une liste de calculs répétitifs.

Des erreurs de conversions d'unités ou d'oubli de conversion des km en m interviendront.

La non proportionnalité devrait se justifier du fait qu'en doublant la hauteur h, cela ne double pas la distance L. Il est intéressant de constater qu'il faut quadrupler la hauteur h pour doubler la distance L.

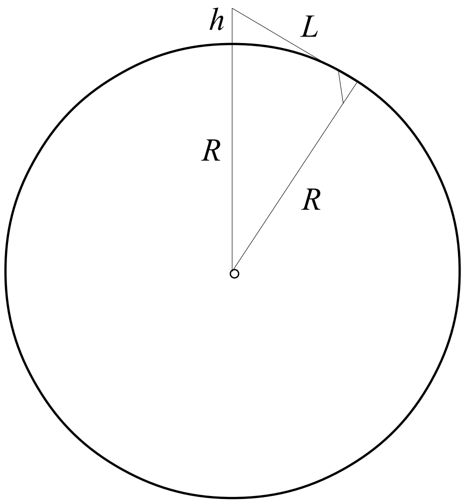
Les échelles du graphique sont une nouvelle source de difficultés. Demander aux élèves de calculer les valeurs extrêmes du graphique, pour choisir les axes.
Tenir la feuille en mode paysage est mieux qu'en mode portrait. Certain le verront.
La précision du graphique sera intéressante. Très peu d'élèves, voir aucun, traceront un graphique correctement autour de $h = 0$ m, (avec une tangente verticale à l'origine.)
Pour remédier à ce défaut, on peut leur demander de calculer la valeur de L explicitement pour $h = 0{,}500$ [m] et pour $h = 0{,}250$ [m].

Pour répondre à la dernière question, une lecture graphique sera faite par la majorité des élèves. C'est un plus, si la résolution se fait par calculs.

La rédaction d'une conclusion étoffée est toujours difficile. Pourtant elle est importante et il faut insister pour avoir une conclusion développée, avec des *phrases en français*.
Ce n'est pas parce qu'ils sont en cours de mathématiques, que les explications et les rédactions en français peuvent être négligées.

Variantes et/ou développements possibles :
Il serait également possible d'expérimenter la relation entre la hauteur h et la distance L de l'horizon, en traçant un grand cercle et en dessinant plusieurs situations pour des hauteurs différentes. C'est une approche qui ne nécessite pas de calculs, mais des constructions géométriques et des mesures de longueurs.

Résolution.
Dans un premier temps, il faut arriver à se représenter le problème à l'aide d'un dessin tel que le suivant :



Les égalités sont traitées comme en physique, c'est-à-dire qu'elles représentent des approximations, qu'en mathématiques on note souvent $\approx$

A l'aide du théorème de Pythagore, on trouve que : $L^2 + R^2 = (R + h)^2$.
On en déduit que : $L = \sqrt{(R+h)^2 - R^2}$. Avec R = 6'370'000 [m].

Il est possible de faire le calcul numériquement : $L = \sqrt{6'370'001^2 - 6'370'000^2} = 3'569 \ [m]$

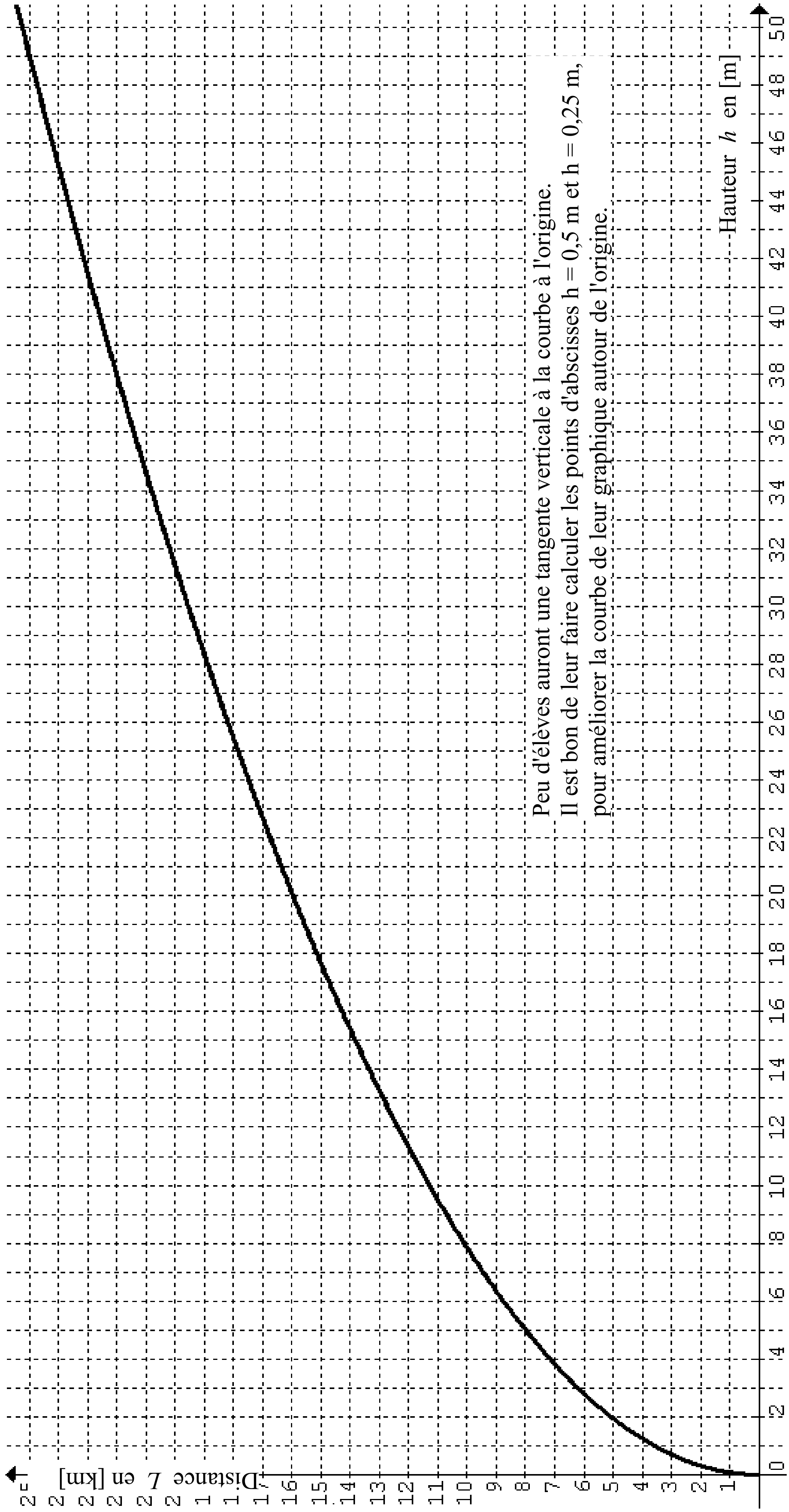
Pour une fois, développer a un avantage : $L = \sqrt{2\,R\,h + h^2}$.
Le calcul est plus simple, avec moins de risque d'erreur d'arrondi.
$L = \sqrt{2 \cdot 6'370'000 \cdot 1 - 1^2} = 3'569 \ [m]$ = 3,57 [km] avec une précision de 1 mètre.
Il a également l'avantage de faire apparaître que h^2 est négligeable devant 2 R h.
Pour h = 2 mètres, $L = \sqrt{2 \cdot 6'370'000 \cdot 2 - 2^2} = 5'048 \ [m]$.
Pour h = 3 mètres, $L = \sqrt{2 \cdot 6'370'000 \cdot 3 - 3^2} = 6'182 \ [m]$.
Pour h = 4 mètres, $L = \sqrt{2 \cdot 6'370'000 \cdot 4 - 4^2} = 7'138 \ [m]$.

e) Vu qu'en doublant la hauteur h, la distance L n'est pas doublée, il n'y a pas proportionnalité entre ces deux grandeurs. Il est intéressant de constater qu'étant 4 fois plus haut, on voit deux fois plus loin.

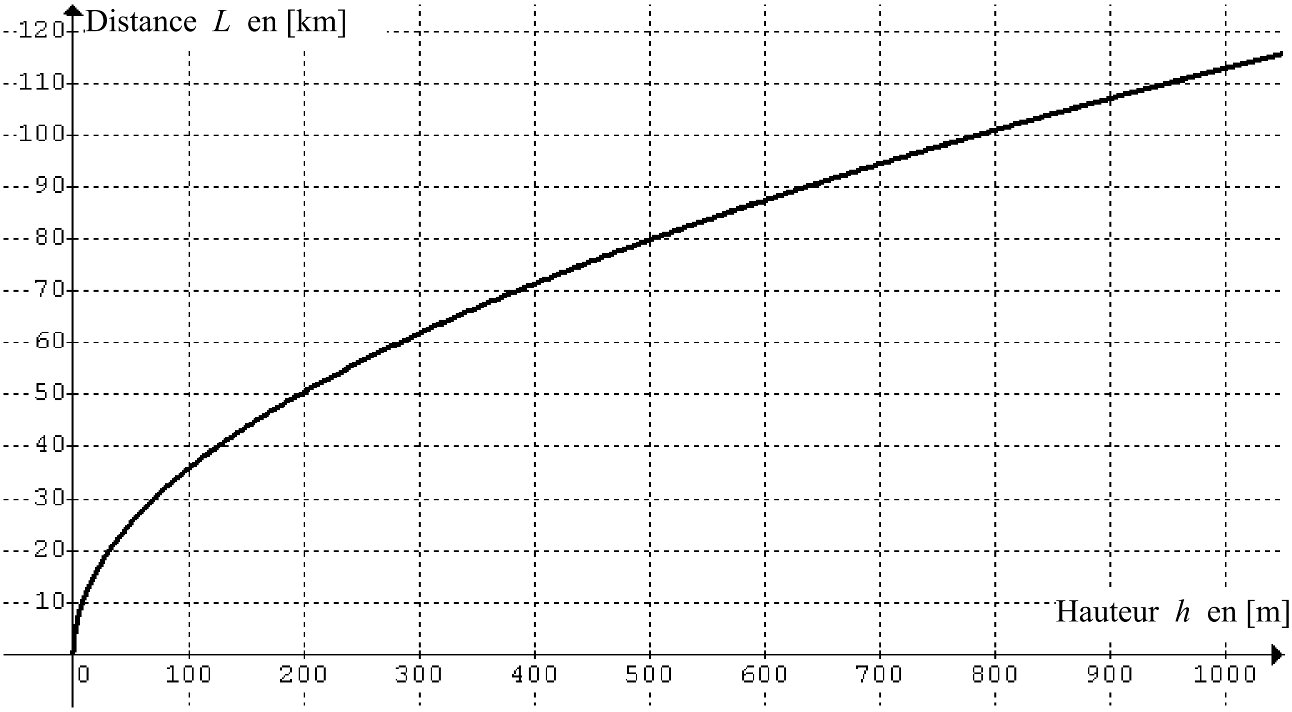
f) Le graphique se trouve à la page suivante.

g) Par lecture graphique, on trouve que h = presque 8 mètres pour voir à 10 km.
Par calculs, $h = \sqrt{L^2 + R^2} - R$, qui donne h = 7,85 m, pour L = 10'000 m.

Voici un premier graphique de L en fonction de h, pour h variant de 0 à 50 [m].

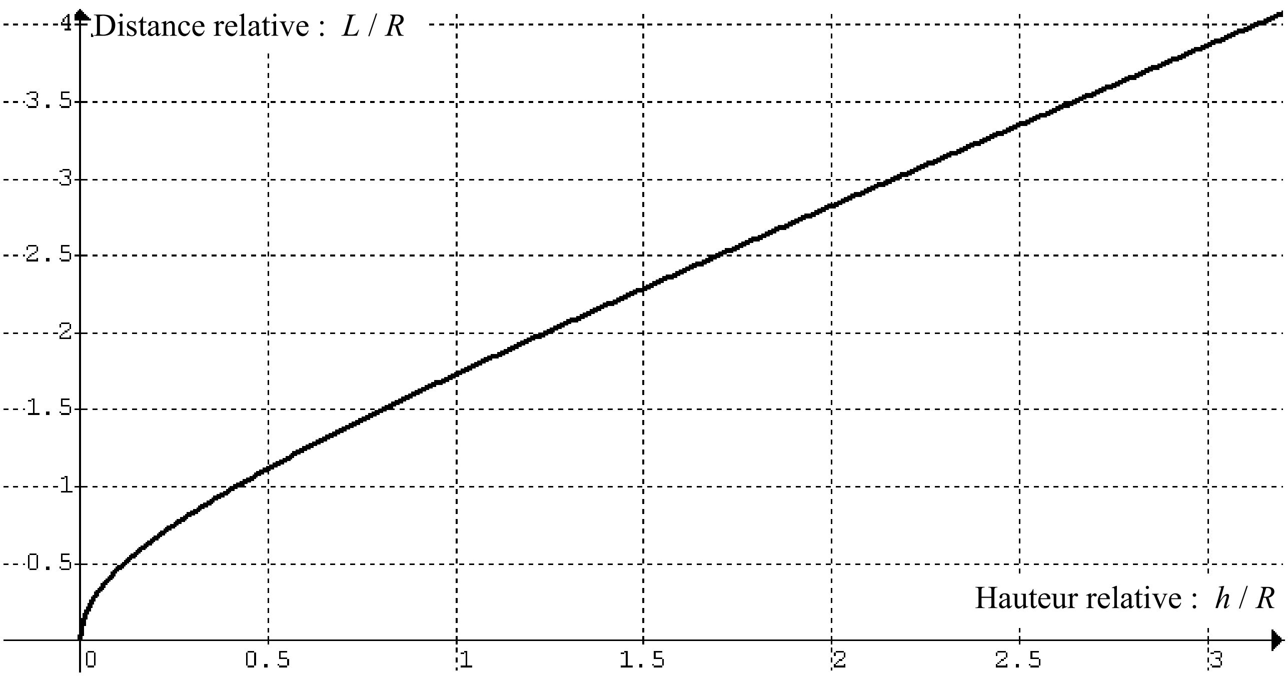


Voici un autre graphique, pour h variant de 0 à 1'000 [m].
Dans ce cas, la formule approximée : $L = 3{,}57\cdot\sqrt{h}$ donne une courbe non distinguable de celle de la formule non approximée : $L = \sqrt{2Rh + h^2}$



Voici un deuxième graphique, pour h variant de 0 à 3,2 · R.
Pour une meilleure représentation, les longueurs sont relatives à R.

$\frac{L}{R} = \sqrt{2\cdot\left(\frac{h}{R}\right) + \left(\frac{h}{R}\right)^2}$, rapidement $\frac{L}{R} \approx \frac{h}{R} + 1$



Aide : grille d'évaluation du rapport sur : "L'Horizon..."

Noms : Note :

	appréciation	commentaires
Titre et formulation du but		
Présentation générale		
Français		
Qualité du dessin de départ et légendes associées		
Explication des symboles utilisés		
Écriture correcte des développements		
Allusion à Pythagore et justification de l'angle droit		
Réponse pour h = 1 m Développement		
Explications en français Réponses en français		
Réponses pour h = 2 à 4 m Développement		
Explication en français Réponse en français		
Non proportionnalité, explication correcte		
Graphique : titre ; légendes, avec mots ?		
Choix convenable de la graduation.		
Graphique de L en fonction de h et pas l'inverse !		
Nombre de points calculés		
Placement des points h_max =		
Courbe tracée		
Allure de la courbe globale et proche de l'origine		
Valeur de h pour L = 10 km Réponse en français		
Curiosités, ouvertures, originalité		