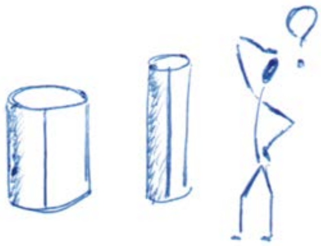
Numéro de la dernière page : 8

Titre : La feuille de format A4 et ses cylindres



Degré : $11^{\text{ème}}$ LS+LC : première partie
$11^{\text{ème}}$ LS + $1^{\text{ère}}$ collège : deuxième partie

Durée : 45 minutes (pour la première partie, qui forme un tout)
45 minutes (pour la deuxième partie, qui est une suite possible de la première partie)
90 minutes si l'on souhaite traiter les deux parties successivement.

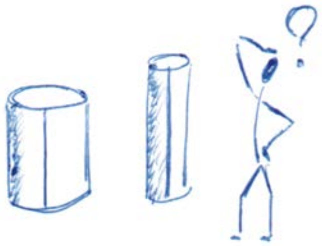
Résumé :

Cette activité se déroule en deux parties qui peuvent être effectuées sur deux périodes distinctes de 45 minutes. On peut même effectuer la première partie et poser la question de la deuxième partie à « méditer » à la maison, avant de l'aborder en classe.

La première partie propose à l'élève d'obtenir deux cylindres à l'aide d'une feuille de format A4 (21 cm x 29,7 cm).
L'un des cylindres est obtenu en roulant la feuille sur sa longueur et en faisant coïncider les deux bords opposés. L'autre cylindre s'obtient en roulant la feuille sur sa largeur et en faisant coïncider les deux bords opposés.
L'élève doit ensuite comparer les volumes des deux cylindres et calculer leur rapport.
Cette activité nécessite la connaissance des formules du volume et de l'aire latérale du cylindre, la maîtrise du calcul littéral correspondant à ce degré et la notion de rapport.

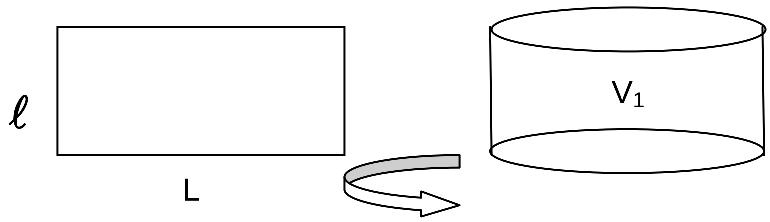
La deuxième partie, difficile techniquement, propose à l'élève de recommencer la même activité en enlevant deux triangles rectangles de mêmes dimensions à la feuille de format A4. Les côtés perpendiculaires de chaque triangle sont la largeur de la feuille et une mesure x. L'élève doit trouver la (ou les) valeur(s) de x pour la(es)quelle(s) les deux cylindres ont le même volume. Cette deuxième partie, outre les compétences requises dans la première partie, nécessite également le théorème de Pythagore, les triangles semblables et la résolution d'équation à une inconnue du 1^{er} degré.
En outre, elle est particulièrement intéressante parce qu'elle demande à l'élève de mobiliser ses connaissances dans divers domaines, tant algébriques que en grandeurs et mesures.

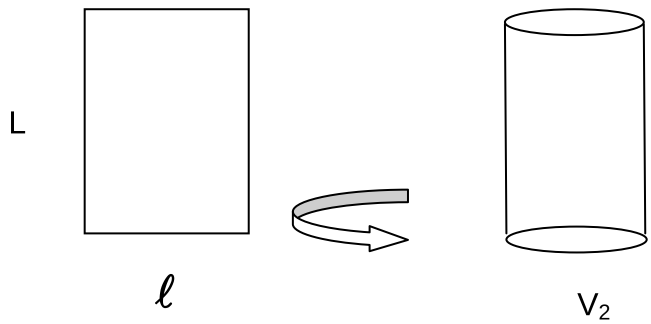
La feuille de format A4 et ses cylindres.



<u>Première partie</u> :

En roulant une feuille de format A4 une fois dans le sens de sa largeur et une fois dans le sens de sa longueur, tu obtiens deux cylindres :





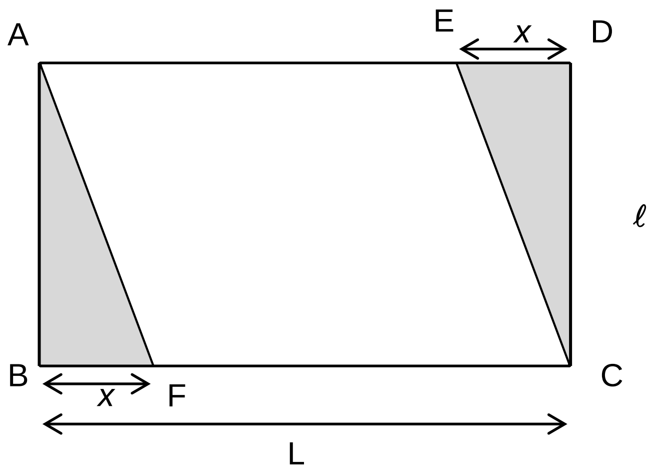
a) Calcule leurs volumes V_1 et V_2 (à 1 cm^3 près).

b) Montre que : $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{L}{\ell}$

c) Cette égalité serait-elle vraie si on avait pris une feuille A5 (= A4 coupée en 2) ou une feuille d'un autre format ?

<u>Deuxième partie</u> :

Dans une feuille de format A4, enlève deux triangles rectangles de mêmes dimensions, comme ceux qui sont ombrés sur le croquis ci-dessous.



a) Avec le parallélogramme ACED, tu fais le même exercice que celui effectué dans la première partie et tu cherches pour quelle(s) valeur(s) de x les deux cylindres ont le même volume.

b) Indication :

Exprime V_1 et V_2 par deux formules dans lesquelles L et ℓ , sont respectivement la longueur et la largeur de la feuille initiale et x est la mesure à déterminer.
Détermine ensuite cette valeur en posant et résolvant l'équation $V_1 = V_2$.

Titre : La feuille de format A4 et ses cylindres.

Degré : 11^{e} Harmos

Prérequis :

- Première partie : formules de l'aire latérale et du volume d'un cylindre, savoir établir une formule générale, savoir poser un rapport.
- Deuxième partie : idem plus le théorème de Pythagore, les triangles semblables, la résolution d'équations.

Objectifs :

- Appliquer des formules à des données numériques.
- Définir les variables intervenant dans un problème.
- Utiliser l'algèbre pour établir une formule générale.
- Utiliser le théorème de Pythagore.
- Utiliser les propriétés des triangles semblables.
- Poser et résoudre une équation.

Matériel :

- Feuilles format A4, règle millimétrée, calculatrice. (éventuellement ciseaux).

Durée estimée : 45 minutes (pour la première partie, qui forme un tout)
45 minutes (pour la deuxième partie)

Propositions de déroulement :

Première partie :

- Constituer des groupes de 2 élèves.
- Donner 10 minutes pour effectuer la question a) .Mettre les réponses de chaque groupe au tableau, choisir deux élèves qui ont trouvé la bonne réponse et les laisser effectuer la correction au tableau, chaque élève traitant un cylindre.
- Pendant ce temps, aider les groupes en difficulté.
- Après 25 minutes, les groupes abordent la question b). Aider ceux qui ont des difficultés en leur donnant, par exemple, comme indication :
« Exprime V_1 et V_2 par deux formules dans lesquelles L et ℓ, sont respectivement la longueur et la largeur de la feuille ».
- Les groupes rédigent ensuite leur solution et la rendent à l'enseignant qui la corrige. Ou alors, l'enseignant effectue la correction en classe et distribue ensuite la résolution ci-jointe à chaque élève.
Il est utile que l'élève ait la solution avant d'aborder la deuxième partie.
- L'enseignant aborde avec ses élèves la question c).

Deuxième partie :

- Constituer des groupes de 2 élèves.
- Laisser chaque groupe travailler environ 10 minutes, puis passer vers les élèves afin d'aider ceux qui sont bloqués.
- Une première difficulté sera le calcul de (EC) et de la hauteur (FG) du parallélogramme AFCE relative au côté (AF), nécessaires pour calculer le volume d'un des deux cylindres.
- Il peut être utile de compléter le croquis comme dans la solution proposée, en traçant la hauteur du parallélogramme.
- Certains élèves bloqués peuvent être aidés par l'indication :

  « Exprime V_1 et V_2 par deux formules dans lesquelles L et ℓ , sont respectivement la longueur et la largeur de la feuille initiale et x est la mesure à déterminer. Détermine ensuite cette valeur en posant et résolvant l'équation $V_1 = V_2$. »

Analyse a priori de l'activité :

- Dans la première partie, les élèves peuvent ne pas voir l'intérêt de généraliser un problème qu'ils ont résolu, mais cela permet clairement le constat que le rapport des volumes correspond au rapport des dimensions du format A4.
- La solution de la deuxième partie peut les étonner et les inciter peut-être à se demander pourquoi le format A4 est ainsi défini (voir à ce propos, l'élémeℓnt historique mentionné plus loin).

Variantes et/ou développements possibles :

Résolution de la première partie

a) Cylindre obtenu en roulant la feuille dans le sens de sa longueur.

Sa hauteur correspond à $\ell = 21$ cm
Sa base a un périmètre de L = 29,7 cm
Le périmètre $2\pi R_1 = 29{,}7$, donc $R_1 = \dfrac{29{,}7}{2\pi}$

$$V_1 = \pi \cdot R_1^{\,2} \cdot \ell = \pi \cdot \left(\frac{29.7}{2\pi}\right)^2 \cdot 21 \approx 1474 \text{ cm}^3$$

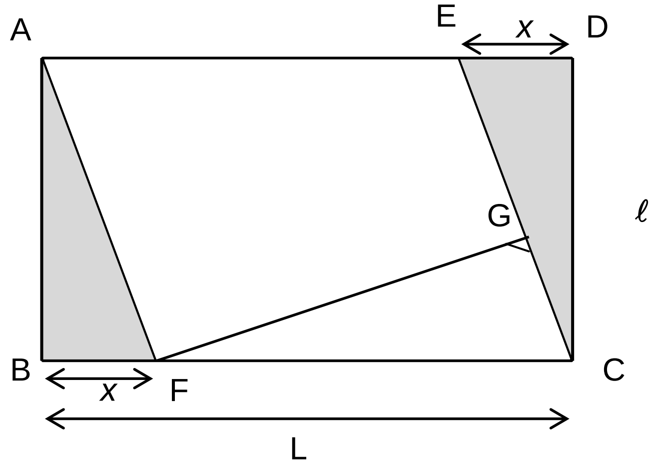
Cylindre obtenu en roulant la feuille dans le sens de sa largeur.

Sa hauteur correspond à L = 29,7 cm
Sa base a un périmètre de $\ell = 21$ cm
Le périmètre $2\pi R_2 = 21$, donc $R_2 = \dfrac{21}{2\pi}$

$$V_2 = \pi \cdot R_2^{\,2} \cdot L = \pi \cdot \left(\frac{21}{2\pi}\right)^2 \cdot 29{,}7 \approx 1042 \text{ cm}^3$$

b) $$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1474}{1042} = \frac{29{,}7}{21} = \frac{L}{\ell}$$

Résolution de la deuxième partie :



a) Cylindre obtenu en roulant la feuille dans le sens de sa longueur (FC).

Sa hauteur correspond à ℓ.
Sa base a un périmètre de $L-x$

Le périmètre $2\pi R_1 = L-x$ donc $R_1 = \dfrac{L-x}{2\pi}$

$$V_1 = \pi \cdot R_1^2 \cdot \ell = \pi \cdot \left(\frac{L-x}{2\pi}\right)^2 \cdot \ell$$

$$\boldsymbol{V_1 = \frac{(L-x)^2}{4\pi}} \cdot \ell$$

Cylindre obtenu en roulant la feuille dans le sens de sa largeur (AF)

Sa hauteur correspond à (FG) :
Remarquons que les triangles FGC et EDC sont semblables
($\sphericalangle FGC = \sphericalangle EDC = 90^\circ$; $\sphericalangle FCG = \sphericalangle DEC$ car alternes-internes)
On peut écrire :

$\dfrac{FG}{DC} = \dfrac{FC}{EC}$ où $FC = L-x$; $DC = \ell$; $EC = \sqrt{x^2+\ell^2}$ (Pythagore dans le triangle EDC)

$\dfrac{FG}{\ell} = \dfrac{L-x}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$ d'où $FG = \dfrac{\ell \cdot (L-x)}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$

Sa base a un périmètre de $EC = \sqrt{x^2+\ell^2}$

Le périmètre $2\pi R_2 = \sqrt{x^2+\ell^2}$ donc $R_2 = \dfrac{\sqrt{x^2+\ell^2}}{2\pi}$

$$V_2 = \pi \cdot R_2^2 \cdot \frac{\ell \cdot (L-x)}{\sqrt{x^2+\ell^2}} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2+\ell^2}}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{\ell \cdot (L-x)}{\sqrt{x^2+\ell^2}}$$

$$\boldsymbol{V_2 = \frac{\sqrt{x^2+\ell^2} \cdot \ell (L-x)}{4\pi}}$$

Posons maintenant l'égalité souhaitée :

$$V_1 = V_2$$

$$\frac{(L-x)^2}{4\pi}\cdot\ell = \frac{\sqrt{x^2+\ell^2}\cdot\ell(L-x)}{4\pi}$$

$$L-x=\sqrt{x^2+\ell^2}$$

$$(L-x)^2 = x^2+\ell^2$$

$$L^2-2Lx+x^2 = x^2+\ell^2$$

$$2Lx = L^2-\ell^2$$

$$x=\frac{L^2-\ell^2}{2L}$$

En remplaçant par L = 29,7 cm et ℓ =*21* cm, on trouve x $\simeq$ 7,43 cm, c'est-à-dire le quart de la longueur.

Éléments théoriques et/ou historiques

Wikipédia :

Ces formats sont conçus pour que les proportions de la feuille soient conservées lorsqu'on la plie ou coupe en deux dans sa longueur, permettant ainsi le massicotage sans perte, la confection de livres par pliage, ainsi que l'assemblage, l'agrandissement et la réduction par facteur de deux. Le rapport entre longueur et largeur doit pour cela être égal à la racine carrée de deux, √2 soit environ 1,4142.

Ce qui revient à écrire que : $\frac{L}{\ell}=\frac{\ell}{\frac{L}{2}}$ (ou encore $\frac{L}{\ell}=\sqrt{2}$).

En revenant au résultat de la deuxième partie $x=\frac{L^2-\ell^2}{2L}=\frac{L^2-\frac{L^2}{2}}{2L}=\frac{L^2}{4L}=\frac{L}{4}$