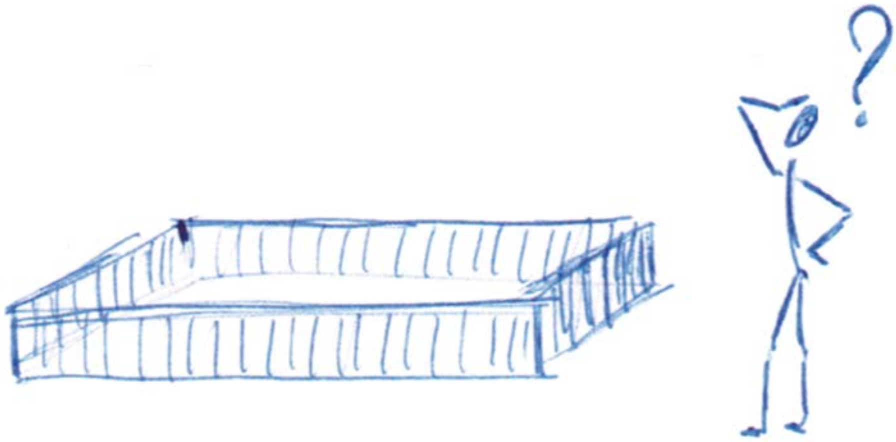
Numéro de la dernière page : 8

Titre : Le plus grand rectangle.



Degrés : 9CO – 11CO
1^{e} – 3^{e} du Collège
PR, 1^{e} – 3^{e} de l'ECG

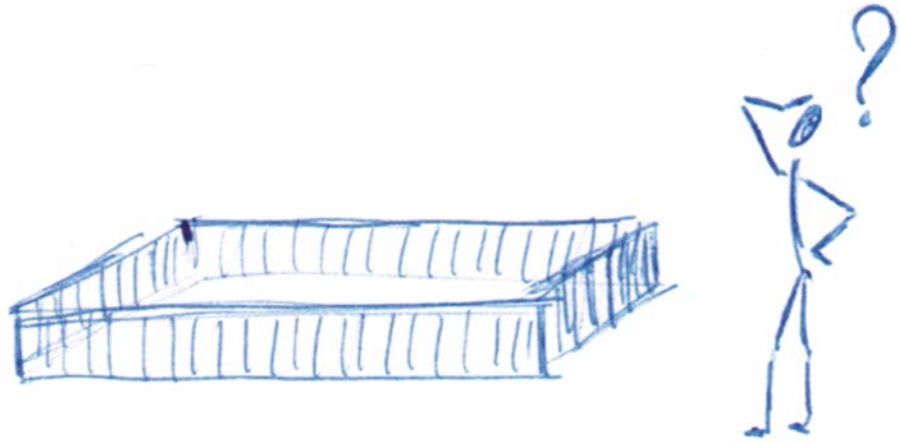
Durée : 45 minutes

Résumé :

Cette activité pose l'élève devant le problème de déterminer le rectangle qui a la plus grande aire et dont le périmètre est fixé.
D'abord, cette activité permet aux élèves de réaliser qu'un même périmètre peut entourer des rectangles plus ou moins grands.
En effet, la prégnance visuelle de l'aire sur le périmètre induit les élèves à croire que pour augmenter l'aire, il convient d'augmenter également le périmètre.
Ensuite, elle questionne sur le moyen d'obtenir la plus grande aire. En effet, les élèves pensent souvent que l'encombrement, c'est-à dire le fait de sembler prendre le plus de place, signifie occuper la plus grande aire.
En conclusion, cette activité place les élèves face à deux de leurs « croyances », que nous avons intérêt à rectifier afin de leur faciliter l'entrée dans le domaine qui nous occupe cette semaine.
De plus, cette activité illustre un exemple de grandeurs inversement proportionnelle.

En 9^{e} et 10^{e}, seules les notions d'aire et de périmètre du rectangle sont utilisées.
Pour les élèves de 11^{e}, 1^{e} et 2^{e} , cette activité fait intervenir l'utilisation de l'algèbre et la représentation graphique d'une parabole.
Enfin, pour les élèves de 3^{e} , s'ajoute la notion de dérivée d'une fonction.

Le plus grand rectangle.



Un fermier veut délimiter un enclos rectangulaire avec une clôture de 100 mètres.
Quelles sont les dimensions du rectangle qui a la plus grande aire ?
Calcule son aire.

Titre : Le plus grand rectangle

Degrés : 9CO – 11CO
1e – 3e du Collège
PR, 1e – 3e de l'ECG

Prérequis :
- 9e -10e : périmètre et aire rectangle
- 11e-1e -2e : algèbre et fonctions
- 3e : algèbre, fonctions et dérivée

Objectifs :
- 9e -10e
  Notions d'aires et de périmètre
  Grandeurs inversement proportionnelles
- 11e -1e -2e
  Définir les variables intervenant dans un problème.
  Utiliser l'algèbre pour exprimer les relations qui lient les variables.
  Représenter graphiquement la fonction (du 2ème degré) décrivant un problème.
  Lire et interpréter un graphique.
  Reconnaître les caractéristiques des grandeurs inversement proportionnelles
- Mêmes objectifs que ci-dessus.
  Notion de dérivée.

Matériel :
- 9e -10e
  Eventuellement une ficelle.

Durée estimée : 45 minutes

Propositions de déroulement :

9e et 10e :
- Constituer des groupes (3 élèves par groupes).
- Demander aux élèves de faire des essais en faisant varier les dimensions du rectangle, de calculer des aires, d'organiser leurs résultats.
- Laisser chaque groupe travailler seul environ 15 minutes.
- Si nécessaire, demander à chaque groupe de relever ses résultats dans un tableau mentionnant la longueur, la largeur, le périmètre et l'aire des différents rectangles (annexe 1, p.5)
- Mise en commun des réponses de chaque groupe.
- Conclure et attirer l'attention des élèves sur la proportionnalité inverse « visible » sur le tableau récapitulatif de tous les rectangles à dimensions entières. (annexe 2, p.6)

11e -1e -2e :
- Constituer des groupes (3 élèves par groupes)
- Laisser chaque groupe travailler environ 10 minutes, puis demander à chaque groupe sa démarche ou, le cas échéant, sa solution.

- Demander aux élèves, y compris à ceux qui ont trouvé la réponse par essais successifs, de chercher une généralisation du problème et de trouver la fonction qui exprime l'aire du rectangle en fonction d'une dimension (x) du rectangle.
- Leur demander de tracer la représentation graphique de cette fonction pour y lire la réponse du problème.
- Mise en commun des réponses et vérifications.
- Souligner la proportionnalité inverse qui relie les dimensions des rectangles.

3^{e} :

- Constituer des groupes de 2 élèves.
- Procéder comme ci-dessus, très rapidement, selon les besoins des élèves.
- Demander aux élèves de déterminer la fonction exprimant l'aire du rectangle en fonction d'une de ses dimensions, de la tracer.
- Leur demander de vérifier leur résultat en dérivant la fonction.
- Mise en commun et conclusions.

Analyse a priori de l'activité :

- S'assurer que les élèves ont compris le problème posé et, le cas échéant, leur donner une ficelle fermée (9^{e} -10^{e}).
- Sensibilisation à l'interprétation visuelle de l'encombrement sur l'aire : certains élèves pensent que les figures qui prennent en apparence le plus de place ont la plus grande aire.
- Sensibilisation à l'impact visuel de l'aire sur le périmètre.
- Les élèves de 11^{e} auront probablement besoin d'aide, de consignes supplémentaires pour exprimer la quantité à optimiser en fonction d'une seule variable.
- Les élèves de 11^{e} -1^{e} – 2^{e} seront peut-être peu motivés à chercher une généralisation du problème en passant par l'algèbre alors qu'il est possible, voire simple, de le résoudre par essais successifs. Attirer alors leur attention sur l'efficacité qu'offre une formule (une fois trouvée) et à la visualisation du problème que permet la représentation graphique de la fonction associée à ce problème. (voir une variante proposée ci-dessous.

Variantes et/ou développements possibles :

- Même activité avec une clôture de 99 mètres.

- « Si l'enclos est adossé au mur, quelle est le rectangle d'aire maximale ? »
-
- Clôture le plus grand polygone.

- On peut développer cette activité en soulignant les caractéristiques de la proportionnalité inverse et faisant tracer la représentation graphique relative à cette relation.

Annexe 1 :

$1^{ère}$ dimension	$2^{ème}$ dimension	Aire rectangle	Périmètre rectangle
			100

Annexe 2 :

$1^{\text{ère}}$ dimension	$2^{\text{ème}}$ dimension	Aire rectangle	Périmètre rectangle
1	49	49	100
2	48	96	
3	47	141	
4	46	184	
5	45	225	
6	44	264	
7	43	301	
8	42	336	
9	41	369	
10	40	400	
11	39	429	
12	38	456	
13	37	481	
14	36	504	
15	35	525	
16	34	544	
17	33	561	
18	32	576	
19	31	589	
20	30	600	
21	29	609	
22	28	616	
23	27	621	
24	26	624	
25	25	625	

Résolution (11^e -1^e -2^e) :

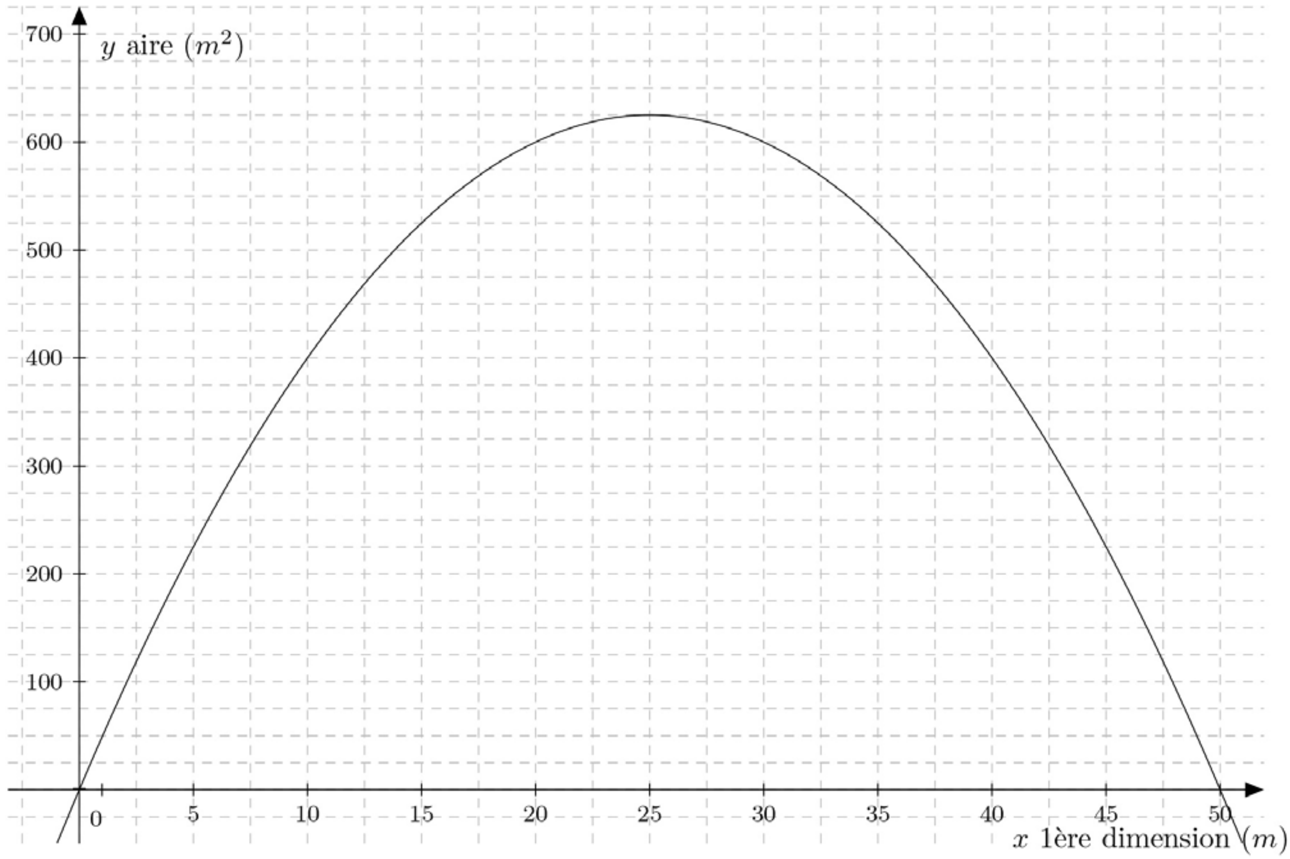
Posons :

x = largeur du rectangle
y = longueur du rectangle
$x \cdot y$ = aire du rectangle
$2x + 2y$ = périmètre du rectangle

Comme :
$2x + 2y = 100$
$2y = 100 - 2x$
$y = 50 - x$

Exprimons l'aire comme fonction de x :
$f(x) = x \cdot (50 - x)$
$f(x) = 50x - x^2$

Représentons par un graphique cette fonction de x.



Résolution (3^e) :

Dérivons la fonction $f(x) = 50x - x^2$:

$f'(x) = 50 - 2x$.

La dérivée s'annule lorsque $x = 25$.

x		25	
$50 - 2x$	+	0	–

Lorsque $x = 25$, l'aire est maximale.
Lorsque $x = 25$, $y = 50 - 25 = 25$.
Le rectangle qui a la plus grande aire est le carré de 25 cm de côté et son aire vaut 625 cm^2.

Éléments théoriques et/ou historiques

fr.wikipedia.org/wiki/Isopérimétrie