Numéro de la dernière page : 9

Titre : Problèmes de Poids

Degré : 9CO – 11CO

Durée : 45 minutes

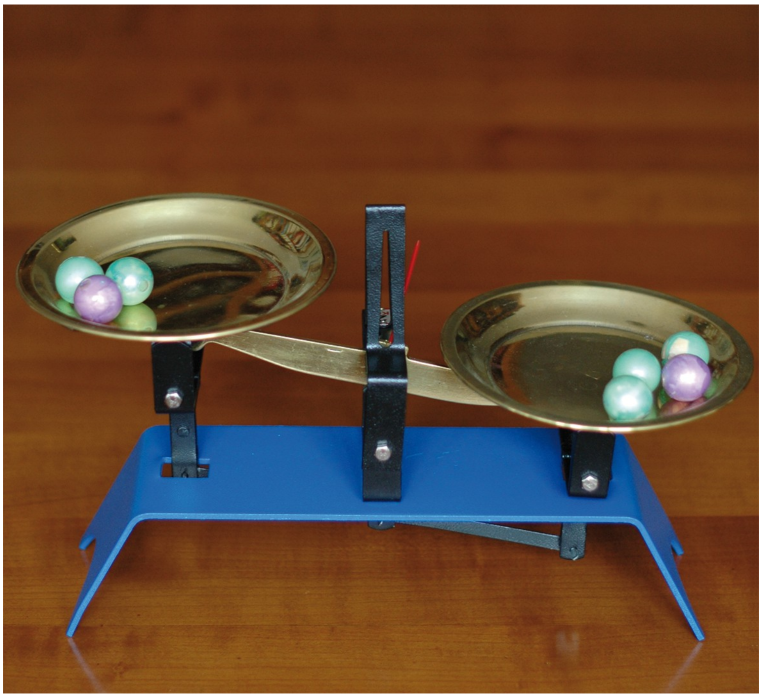
Résumé :

Cette activité aborde la comparaison d'objets sans passer par leur mesure. Il s'agit, à l'aide d'une balance à deux plateaux, de trouver la pièce la plus lourde parmi 9 pièces indiscernables. Aucune méthode n'est suggérée.

L'activité se poursuit par une recherche, sans l'aide de la balance, du nombre minimal de pesées pour trouver une bille plus lourde parmi 10, 20, 200 ou 1000 billes indiscernables.

Cette recherche aboutira vers une formule générale dont on construira la démonstration avec l'ensemble de la classe.

Problèmes de Poids



Tu disposes d'une collection de billes et d'une balance à deux plateaux. Toutes les billes ont le même poids sauf une qui est plus lourde. Quel est le nombre minimal de pesées qu'il faut faire pour trouver la bille la plus lourde si

a) la collection comporte 9 billes
b) la collection comporte 10 billes.
c) la collection comporte 20 billes.
d) la collection comporte 200 billes.
e) la collection comporte 1000 billes.

Numéro de la dernière page : 9

Titre : Problèmes de Poids

Degrés concernés : 9CO – 11CO

Prérequis :

Objectifs :

- déterminer une stratégie optimale
- distinguer la masse par rapport à d'autres grandeurs
- comparaison directe ou indirecte de plusieurs objets en fonction de leur masse
- organisation d'un mesurage et choix d'une procédure

Matériel : (voir Annexe p. 5 pour du matériel alternatif et pour la confection des billes)

- 1 balance Roberval
- 1 set de billes à peser comportant au moins 9 billes (idéalement, 27)

Durée estimée : 45 minutes

Proposition de déroulement :

1re partie

- les élèves cherchent des méthodes pour la bille la plus lourde en un minimum de pesées
- l'enseignant passe dans les rangs pour relancer les élèves – si cela est nécessaire, il peut évoquer le facteur chance
- lorsqu'un groupe a trouvé une bonne méthode, l'enseignant les autorise à aller essayer sur la balance ; l'enseignant manipule lui-même les billes pour éviter que la bille différente ne soit détectée à la main
- lorsqu'un groupe finit de résoudre toutes les questions, l'enseignant leur propose de généraliser leur méthode

2e partie: Mise en commun

Lorsque tous les groupes ont résolu les cinq questions, on fait une mise en commun où l'enseignant, aidé par les élèves généralise le problème, pour aboutir à une formule et une méthode pour déterminer le nombre maximal de pesées pour trouver la bille la plus lourde parmi un nombre donné de billes de même poids. La méthode permet aussi la construction d'une preuve par récurrence, qui sera faite par l'enseignant aidé par les élèves.

Analyse a priori de l'activité :

Démarches prévisibles des élèves

- pour a), les élèves trouvent facilement une stratégie en 3 pesées. Mais la stratégie optimale est en 2 pesées (voir Démarche probable des élèves mais non optimale, p. 7, pour le détail).
- les élèves ne déduisent pas toutes les informations d'une pesée. Par exemple, s'ils mettent 2 billes sur chaque plateau et que la balance s'équilibre, ils tendront à comparer les deux billes mises de côté avec les autres pour vérifier que la plus lourde est bien là.

Difficultés potentielles

- mauvaise compréhension de la consigne
- les élèves peuvent ne pas comprendre que même si on ne pèse pas certaines billes, on peut quand même déduire des informations sur leur poids
- méconnaissance du fonctionnement d'une balance
- découragement
- difficulté d'utilisation du matériel
- gestion du groupe déficiente

Interventions de l’enseignant

1re partie

- Relancer les élèves avec l’indication suivante : peut-on trouver la bille la plus lourde parmi trois billes en une seule pesée ?

+ cf. Déroulement

Variantes et/ou développements possibles :
demander aux élèves ce qui change lorsqu'on ne sait pas si la bille est plus lourde mais on sait uniquement qu'elle a un poids différent (voir la fiche pour le PO).

Variables didactiques : le nombre de billes à peser

<u>Annexes</u> :

Confection des billes

Vous pouvez confectionner des billes en bois ou en pâte à modeler ou en LEGO.

Billes en pâte à modeler :

Matériel : pâte à modeler, une bille en verre

A l'aide d'une balance de cuisine, confectionner 8 billes pâte à modeler de poids égal. Pour la neuvième bille, insérer la bille en verre dans une portion de pâte à modeler et façonner pour que cette bille ait la même taille que les 8 autres.

Billes en bois

Matériel : 9 perles en bois (d'un diamètre assez grand, p.ex 45 mm), baguette en bois de diamètre égal au trou de la perle, petites billes de plomb.

Bouchez le trou de 8 perles avec la baguette de bois.
Bouchez une extrémité de la neuvième perle à l'aide d'un morceau de baguette, remplissez le trou de petites billes de plomb et refermez à l'aide d'un deuxième morceau de baguette.

Poids en LEGO :

Matériel : 18 briques LEGO, pâte à modeler

Chaque « Bille » sera constituée de deux briques LEGO. Pour la bille plus lourde, ajoutez de la pâte à modeler à l'intérieur de la brique supérieure.

Vous pouvez aussi utiliser les balles de jonglage confectionnées avec l'activité « Balles de jonglage ».
Notez aussi que les cintres n'ont pas tous la même précision. Pour certains, la différence de poids doit être plus grande que pour d'autres. Faites quelques tests à la maison avant de proposer l'activité.

Matériel alternatif

Vous pouvez confectionner vos propres balances à l'aide de cintres.

Voici quelques idées, de la plus élaborée à la plus rudimentaire :




Balance de gauche

Matériel : un cintre (que vous suspendrez), de la ficelle et deux récipients.
Si vous voulez ajouter la flèche, vous aurez de plus besoin d'une perle en bois, d'une baguette et d'un triangle en bois ou en carton.

Attachez les récipients au cintre avec la ficelle (attention à la symétrie). Au centre du cintre, attachez la perle en bois puis une baguette avec le triangle.

Vous pouvez aussi utiliser la balance virtuelle que vous trouverez à l'adresse :
http://www.juggling.ch/gisin/javascript/JeuPesees/pesees.html

Crédit images :

Balance de gauche et explications :

http://www.cabaneaidees.com/2012/12/deux-balances-a-fabriquer

Balance en bas à droite :
http://lecoledesfees.canalblog.com/archives/2012/03/21/23820191.html

Balance en haut à droite : http://edddlb.blogspot.ch/p/construction-de-mobiles-de-poissons.html

Voir aussi : http://productionsdeseleves.blogspot.ch/2008/03/les-balances-ecole-du-19-km-la-runion.html

Résolution

Notation : nous utiliserons les symboles suivants pour indiquer la position de la balance

- ? lorsqu'on effectue la pesée
- = la balance est à l'équilibre
- / la balance penche à droite
- \ la balance penche à gauche

Problème a)

Séparer les 9 billes en trois groupe de 3 billes notés (1a,1b, 1c), (2a, 2b, 2c) et (3a, 3b, 3c).

Pesée 1 : (1a,1b, 1c) ? (2a, 2b, 2c)

Trois résultats possibles :

Résultat de la Pesée 1	(1a,1b, 1c) = (2a, 2b, 2c)	(1a,1b, 1c) / (2a, 2b, 2c)	(1a,1b, 1c) \ (2a, 2b, 2c)
Conclusion	Les pièces sur la balance ont toutes le même poids. La pièce plus lourde est donc dans le groupe (3a, 3b,3c).	La pièce plus lourde est sur le plateau de droite.	La pièce plus lourde est sur le plateau de gauche.
Pesée 2	(3a) ? (3b)	(2a) ? (2b)	(1a) ? (1b)

Dans tous les cas, la pesée 2 est de la forme (a) ? (b)

A nouveau trois résultats sont possibles :

Résultat de la Pesée 2	(a) = (b)	(a) / (b)	(a) \ (b)
Conclusion	Les pièces sur la balance ont toutes le même poids. La pièce plus lourde est la c.	La pièce plus lourde est la b.	La pièce plus lourde est la a.

Démarche probable des élèves mais non optimale

Pesée 1 : (1a, 1b, 1c,1d) ? (2a, 2b, 2c, 2d)

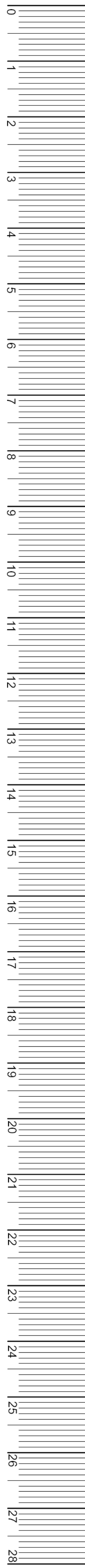
Trois résultats possibles :

Résultat de la Pesée 1	(1a,1b,1c,1d) = (2a,2b,2c,2d)	(1a,1b,1c,1d) / (2a,2b,2c,2d)	(1a,1b,1c,1d) \ (2a,2b,2c,2d)
Conclusion	Les billes sur la balance ont toutes le même poids. La bille plus lourde est donc dans la bille restée sur la table.	La bille plus lourde est sur le plateau de droite.	La bille plus lourde est sur le plateau de gauche.
Pesée 2		(2a, 2b) ? (2c, 2d)	(1a, 1b) ? (1c, 1d)

Dans les deux cas, la pesée 2 est de la forme (a, b) ? (c, d). Cette fois-ci, seuls deux issues sont possibles, car la bille différente est forcement parmi ces 4 billes.

Résultat de la Pesée 2	(a, b) / (c, d)	(a, b) \ (c, d)
Conclusion	La bille plus lourde est sur le plateau de droite	La bille plus lourde est sur le plateau de gauche.
Pesée 3	(c) ? (d)	(a) ? (b)

La dernière pesée permet de conclure.



Problème b) 10 billes

Il faut au plus 3 pesées
On s'aperçoit rapidement que l'on doit séparer les billes en 3 groupes dont 2 avec le même nombre de billes, par exemple : 3, 3, 4 ou 4, 4, 2 ou 5, 5, 1.
Pour le choix avec des groupes composés de 3, 3 et 4 billes respectivement :
on pèse (3) ? (3). Si la balance n'est pas à l'équilibre, il suffit d'une pesée supplémentaire pour trouver la bille plus lourde, pour un total de 2 pesées.
Si la balance est à l'équilibre, il faudra 2 pesées supplémentaires pour trouver la bille plus lourde dans le groupe de 4 billes. On aura donc au plus 3 pesées.
Le raisonnement est semblable pour les autres choix de groupes.

Problème c) 20 billes

$20 = 2 \cdot 9 + 2$
Il faut aussi 3 pesées : à nouveau, plusieurs manières de procéder
La méthode idéale séparer en 3 groupes de 9 ,9 et 2 billes respectivement.
On peut aussi séparer en 3 groupes d'autres manières, par exemple: 4, 4, 9 ou 5, 5, 7 ou 6, 6, 5 ou 7, 7, 3.

Problème d) 200 billes

$200 = 2 \cdot 81 + 38$

Il faut 5 pesées :
à nouveau, plusieurs manières de procéder.
La méthode idéale est de séparer en 3 groupes de 81, 81 et 38 billes respectivement.
Pesée 1 : (81) ? (81)

Si (81) / (81) ou (81) \ (81) :
on sépare les 81 billes en trois groupes de 27 billes.
Pesée 2 : (27) ? (27)
Dans tous les cas, on devra chercher la bille plus lourde parmi 27 billes. On sépare donc à nouveau en 3 groupes de 9 billes.
Pesée 3 : (9) ? (9)
On se ramène ainsi au premier cas traité que l'on sait conclure avec 2 pesées supplémentaires, pour un total de 5 pesées.

Si (81) = (81) :
la bille plus lourde est dans le groupe de 38 billes. On sépare les 38 billes en 3 groupes de 12, 12 et 14 billes respectivement.
Pesée 2 : (12) ? (12)
Si (12) / (12) ou (12) \ (12), on sépare les 12 billes en 3 groupes de 4 billes ou en 2 groupes de 6 billes.
Pesée 3 : (4) ? (4) ou (6) ? (6)
Dans tous les cas, il est facile de conclure avec 2 pesées supplémentaires, pour un total de 5 pesées.

Si à l'issue de la deuxième pesée, on obtient (12) = (12), la bille plus lourde est dans le groupe de 14 billes. Par un raisonnement analogue, on conclut à nouveau avec un total de 5 pesées.

On peut aussi séparer les billes en 3 groupes de 66, 66 et 68 billes respectivement, par exemple. Le raisonnement sera analogue.

Problème e) 1000 billes

$3^6 = 729 < 1000 < 2187 = 3^7$
donc il faut 7 pesées

Généralisation

Notons b le nombre de billes à peser.
Si b est tel que $3^n < b \leq 3^{n+1}$, alors il faut au plus $n+1$ pesées pour trouver la bille la plus lourde parmi b billes. Autrement dit, si on note [•] la partie entière d'un nombre, alors la nombre n de pesées qu'il faut effectuer est donné par $n = [\log_3(b)] + 1$.

Méthode/Preuve:
Il s'agit d'une preuve par récurrence.

Idée principale:

La balance admet trois états: elle penche à gauche, à droite ou elle est à l'équilibre. De plus, nous savons que la bille différente est plus lourde. Donc, en une pesée, nous pouvons distinguer trois groupes de billes. Toute l'idée de la preuve repose sur le fait que, si l'on sépare les billes en trois groupes dont deux au moins contiennent le même nombre de billes, une seule pesée suffira pour déterminer dans quel groupe est la bille la plus lourde.

Initialisation:

Montrons que l'énoncé est vrai pour b<=4.

• Si $b=1$, il n'y a rien à faire.

• Si $b=2$, il suffit d'une pesée pour déterminer quelle bille est plus lourde.
Comme $3^0 = 1 < 2 < 3^1$, la formule est vérifiée.

• Si $b=3$, par l'idée principale, une seule pesée suffit aussi (voir p.6 pour le détail de la pesée).
Comme $3^0 = 1 < 3 \leq 3^1$, la formule est vérifiée.

• Si $b=4$, on a deux possibilités pour partager les billes.

(1a,1b) et (2a,2b) : on fait la pesée (1a,1b) ? (2a,2b), puis (a) ? (b). On fait donc deux pesées.
Comme $3^1 < 4 \leq 3^2$, la formule est vérifiée.

(1a), (2a) et (3a,3b) : on fait la pesée (1a)?(2a) si (1a)/(2a) ou

(1a)\(2a), on aura trouvé la bille une seule pesée. Sinon, il faudra une pesée supplémentaire pour trouver la bille plus lourde dans le groupe (3a,3b).

Il faut à nouveau au plus deux pesées, donc la formule est vérifiée dans ce cas aussi.

Hypothèse de récurrence:

Supposons dès lors que la formule est vérifiée, pour un n donné et pour tout $b_0 \leq 3^n$, et vérifions-la pour un b tel que $3^n < b \leq 3^n + 1$.

Deux cas se présentent: soit $2 \cdot 3^n \leq b \leq 3^{n+1}$, soit $3^n < b < 2 \cdot 3^n$.

Cas 1 : Si $2 \cdot 3^n \leq b \leq 3^{n+1}$ alors on fait trois groupe de 3^n , 3^n , et $(b - 2 \cdot 3^n)$ billes et on pèse (3^n) ? (3^n)
si la balance n'est pas équilibrée, par l'hypothèse récurrence on aura n pesées à faire.
Si la balance est équilibrée: on se ramène à chercher la bille la plus lourde parmi $(b - 2 \cdot 3^n)$ billes. Comme $b \leq 3^{n+1}$ par hypothèse, on a que $b - 2 * 3^n \leq 3^n + 1 - 2 * 3^n = 3^n (3 - 2) = 3^n$.

Ainsi, par l'hypothèse de récurrence on aura au plus n pesées à faire.

Finalement, on a fait une première pesée plus les au plus n pesées, on a bien fait au plus 3^{n+1} pesées et la formule est donc vérifiée.

Cas 2 : Dans le cas où $3^n < b < 2 \cdot 3^n$, on fait une division entière de b par 3 et on note q le quotient et r le reste. Notons au passage que $0 \leq r < 3$.

Les trois groupes seront alors formés par q , q et $q + r$ billes et on pèsera (q)?(q). Si la balance n'est pas équilibrée, il faudra chercher parmi q billes, sinon parmi $q + r$. Montrons alors que q et $q + r$ sont plus petits que 3^n .

Par définition de la division entière, on a $0 \leq r < 3$ et $q = (b - r)/3$

Ainsi, par définition de b on a

$$q = (b - r)/3 < (2 \cdot 3^n - r)/3 = (2 \cdot 3^{n-1} - r)/3 \leq 2 \cdot 3^{n-1} < 3^n \quad .$$

Donc on a bien que $q < 3^n$. Par l'hypothèse de récurrence, il faudra donc au plus n pesées pour trouver la bille la plus lourde parmi q billes.

Montrons maintenant que $q + r \leq 3^n$

Par définition de q et de r , on a

$$q + r = \frac{b - r}{3} + r = \frac{b + 2\text{r}}{3} < \frac{2 \cdot 3^n + 2\text{r}}{3} = \frac{2(3^n + r)}{3} < \frac{2(3^n + 3)}{3} = 2 \cdot 3^{n-1} + 2 \quad .$$

Si $n > 1$, on a bien que $q + r < 2 * 3^{n-1} + 2 < 3^n$. Ainsi, par l'hypothèse de récurrence, il faudra au plus n pesées pour trouver la bille plus lourde parmi $q + r$ billes.

Finalement, on a fait une première pesée puis les au plus n pesées, pour un total d'au plus $3^n + 1$ pesées et la formule est donc vérifiée, ce qui achève notre démonstration.