Titre : La boule de neige

Degré : 2^e du Collège ; 2^e de l'ECG.

Durée : 95 minutes ou 45 minutes, si les élèves sont guidés.

Résumé :
Cette activité concerne une croissance exponentielle de la taille d'une boule de neige. Elle est une bonne introduction aux fonctions logarithmes et exponentielles. Il est souhaitable que les élèves n'aient pas encore vu ces notions. Ceci pour qu'ils découvrent et n'appliquent pas uniquement des recettes.

Les notions mathématiques utilisées dans cette activité sont les pour-cents, la mise en évidence, un peu de calcul littéral et une conversion d'unités dans la dernière partie. Le problème est conceptuellement compliqué. Une difficulté est de ne pas tomber dans le piège de la proportionnalité en pensant que si l'augmentation d'une grandeur est de 10% pour un mètre, alors elle est de 50% pour 5 mètres.
Une autre difficulté est de donner une réponse en pour-cent et non en valeur absolue.

La boule de neige

En faisant rouler une boule de neige sur une pente enneigée, son volume augmente de 10% par mètre.

a) De combien aura augmenté son volume après 5 mètres ?

b) Après combien de mètres aura-t-elle doublé son volume ?

c) Son volume initial étant de 250 cm^3, après combien de mètres la boule a-t-elle un volume de 1 m^3 ?

d) Généralisations ? ?????

Titre : La boule de neige

Degrés : 2^{e} du collège ; 2^{e} de l'école de culture générale

Prérequis :
Les notions mathématiques utilisées dans cette activité sont les pour-cents, la mise en évidence, un peu de calcul littéral et une conversion d'unités dans la dernière partie. Le problème est conceptuellement compliqué. Une difficulté est de ne pas tomber dans le piège de la proportionnalité en pensant que si l'augmentation d'une grandeur est de 10% pour un mètre, alors elle est de 50% pour 5 mètres. Une autre difficulté est de donner une réponse en pour-cent et non en valeur absolue.

Objectifs :
Introduire la notion de croissance exponentielle.
Introduire la notion de logarithme pour résoudre un certain type d'équation.

Matériel :
De quoi écrire, des feuilles de papier et une calculatrice sont indispensables.

Durée estimée :
Une partie de l'activité peut se faire en 45 minutes ou moins si les élèves sont guidés au départ.
Elle peut se faire en 95 minutes, par groupes de 2 élèves, si on leur demande un rapport écrit à la fin.

Proposition de déroulement :
Annoncer un cours à l'avance qu'une activité de 95 minutes à réaliser par groupes de deux élèves aura lieu le cours suivant, avec un rapport écrit à rendre à la fin. Il est conseillé d'annoncer qu'il sera noté. Cela stresse un peu les élèves, mais cela les stimule et comme la note est souvent bonne, ils terminent avec une belle satisfaction.
Indiquer qu'une règle et une calculatrice seront nécessaires, ainsi que de quoi écrire. Des feuilles quadrillées pour tracer des graphiques sont souhaitables.
Le jour de l'activité, distribuer la feuille d'énoncé à chaque élève. Les laisser 5 minutes seuls face au problème, pour qu'ils le lisent et imaginent des pistes de départ.
Ensuite, laisser les groupes se former et laisser les élèves attaquer le problème. Passer auprès des groupes régulièrement, les écouter, mais ne pas trop les aider.
Rappeler après 45 minutes qu'un rapport écrit est demandé et les inciter à commencer la rédaction des résultats partiels.

Analyse à priori de l'activité :
La principale difficulté sera de ne pas supposer qu'il y a proportionnalité entre la distance parcourue et la croissance de la boule de neige.
Le fait que la taille de la boule de neige ne soit pas donnée au départ, troublera beaucoup d'élèves. Ils doivent se rendre compte que l'augmentation de la boule de neige peut se donner en pour-cent et est indépendante de la taille initiale.
Avoir une approche systématique et faire des tableaux de croissance sera utile.
Trouver une équation d'un type qui n'a pas encore été vu, troublera certains élèves. Seule une solution approximative peut être obtenue à ce stade. L'intérêt est donc d'introduire lors de leçons à venir les fonctions logarithmes qui permettent de résoudre cette équation.

La question a) sera probablement la plus difficile à résoudre correctement.
Une fois résolue et comprises, la question suivante sera d'accès plus facile, mais fera apparaître une équation d'un nouveau type.

La question b) mènera à une équation que les élèves n'auront normalement encore jamais vu et qui nécessite l'usage des logarithmes pour être résolue. Seul une réponse approximative par tâtonnement leur sera accessible.

La même remarque peut se faire pour la question c).
Une conversion d'unité posera parfois quelques difficultés.

Après un certain temps, on peut suggérer aux élèves de tracer un graphique de l'évolution de la taille de la boule de neige en fonction de la distance parcourue.

Exprimer clairement la taille de la boule de neige en fonction de la distance parcourue sera une étape importante. Une étape suivante sera de ce rendre compte qu'il n'est pas simple d'exprimer la fonction réciproque, à savoir la distance parcourue en fonction de la taille de la boule.

La partie "Généralisation" n'est pas indispensable, mais peut répondre à aux questions :
° si le volume initiale était donné sous forme littéral, qu'est-ce que cela changerait ?
° si la croissance était différent de 10% par mètre, quelle serait les réponses aux questions ?

Variantes et/ou développements possibles :
Si le problème est trop difficile à cause du manque de donnée du volume initial de la boule de neige, une possibilité est de donner la taille de 250 cm^3 dès le départ. Il faudra alors demander explicitement d'exprimer l'accroissement de la boule en pour-cent.

Résolution.

a) Dans un premier temps, il faut donner un nom au volume initial V_0.

Après un mètre, le volume vaut : $V_1 = V_0 + 10\% \cdot V_0 = V_0 + 0{,}1 \cdot V_0 = 1{,}1 \cdot V_0$.

L'écriture : $V_1 = 1{,}1 \cdot V_0$ est un pas important dans la résolution du problème.

Après deux mètres, le volume vaut : $V_2 = 1{,}1 \cdot V_1 = 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot V_0 = 1{,}1^2 \cdot V_0$.

Après trois mètres, le volume vaut : $V_3 = 1{,}1 \cdot V_2 = 1{,}1 \cdot 1{,}1^2 \cdot V_0 = 1{,}1^3 \cdot V_0$.

Après quatre mètres, le volume vaut : $V_4 = 1{,}1 \cdot V_3 = 1{,}1 \cdot 1{,}1^3 \cdot V_0 = 1{,}1^4 \cdot V_0$.

Après cinq mètres, le volume vaut : $V_5 = 1{,}1^5 \cdot V_0 \approx 1{,}61 \cdot V_0$.

Après cinq mètres, le volume vaut environ 1,61 fois le volume initial. Il a donc augmenté de 0,61 fois le volume initial, c'est à dire de 61%.

b) Le point a) permet d'exprimer le volume V en fonction de la distance parcourue x.

$V(x) = 1{,}1^x \cdot V_0$

La question revient à trouver x tel que $V(x) = 2 \cdot V_0 = 1{,}1^x \cdot V_0$.

Donc l'équation à résoudre est : $2 = 1{,}1^x$.

Une difficulté est de se rendre compte que la réponse est indépendante du volume initial de la boule de neige.

Pour l'instant, seule une réponse approximative, par tâtonnement peu être trouvée.

$1{,}1^{7{,}3} \approx 2$, donc après 7,3 mètres la boule de neige aura doublé de volume.

c) Ce point est similaire au point suivant.

Le volume V(x) de la boule en fonction de la distance parcourue x est :

$V(x) = 1{,}1^x \cdot V_0$

1 m^3 = 1'000'000 cm^3 = 4'000 · 250 cm^3.

Donc l'équation devient : $1'000'000 = 1{,}1^x \cdot 250$, qui se simplifie en $1{,}1^x = 4'000$.

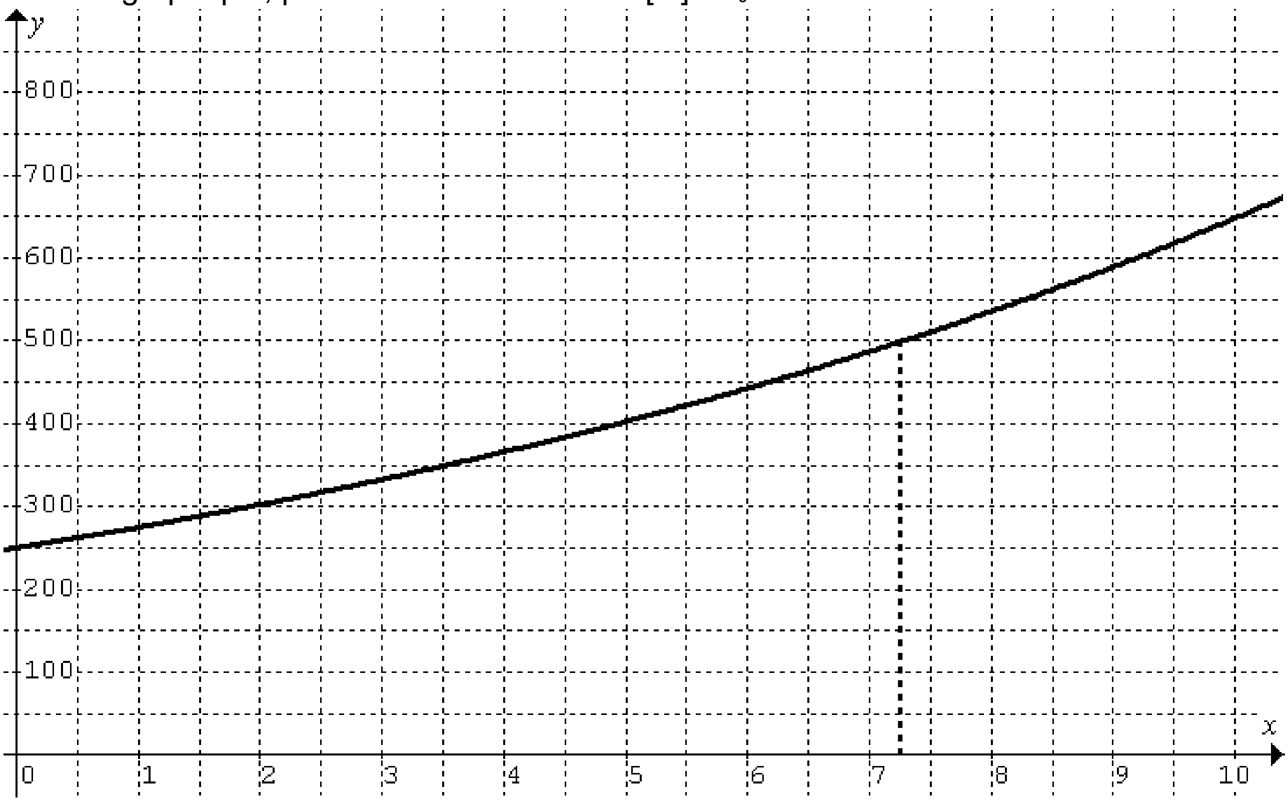
La réponse est surprenante, car il suffit d'environ 87 mètres pour que le volume devienne 4'000 fois plus grand.

Deux graphiques du volume en fonction de la distance parcourue sont donnés en page suivante.

d) Généralisations possibles : $V(x) = (1 + \mathrm{a})^x \cdot V_0$ où

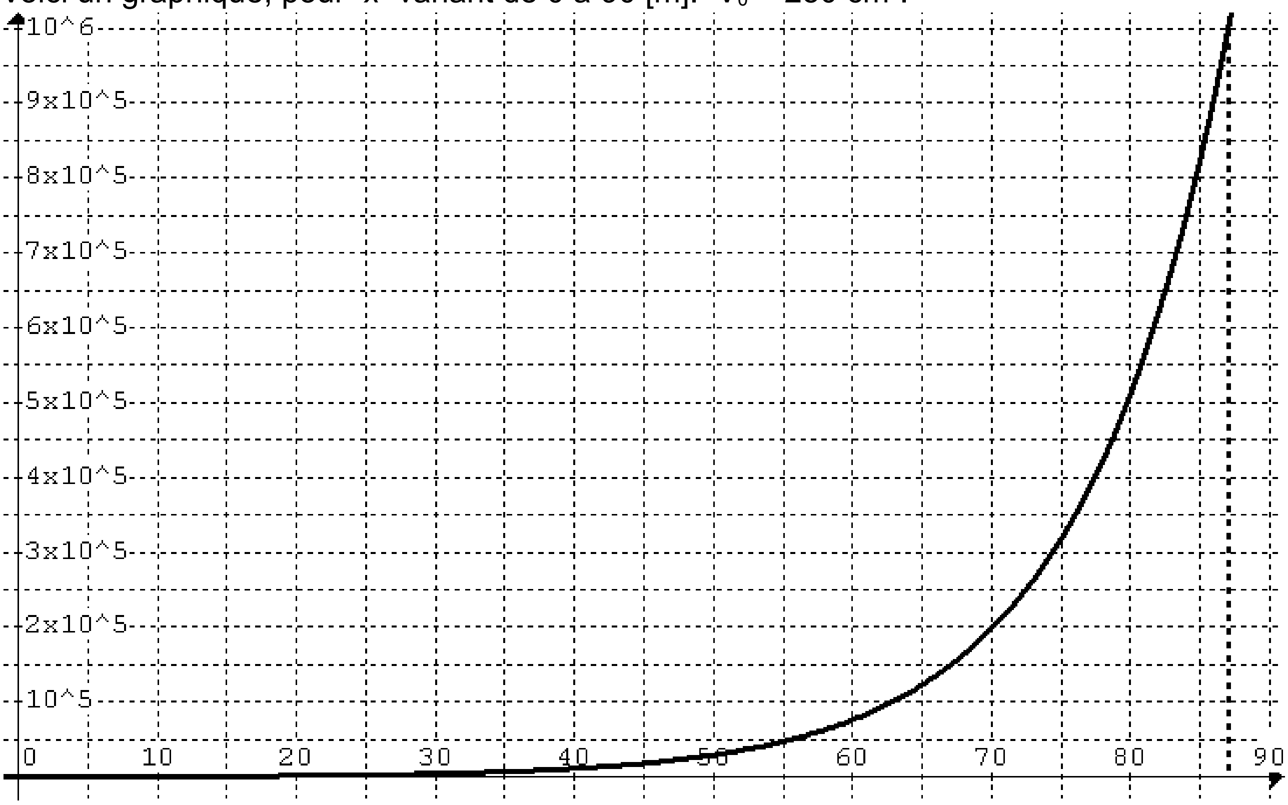
a = l'augmentation en pour-cent de la boule, par mètre parcouru ;
x = la distance parcourue en mètre ;
V_0 = le volume initial de la boule de neige ;
V(x) = le volume de la boule en fonction de la distance parcourue x.
Se rendre compte que l'augmentation relative de la boule de neige est indépendante du volume initial.

Voici un graphique, pour *x* variant de 0 à 10 [m]. $V_0 = 250$ cm^3.



On constate que le volume a doublé après environ 7,3 mètres.

Voici un graphique, pour *x* variant de 0 à 90 [m]. $V_0 = 250$ cm^3.



On constate que le volume est d'environ 1 mètre cube après 87 mètres.
Ce graphique est typique d'une croissance exponentielle.