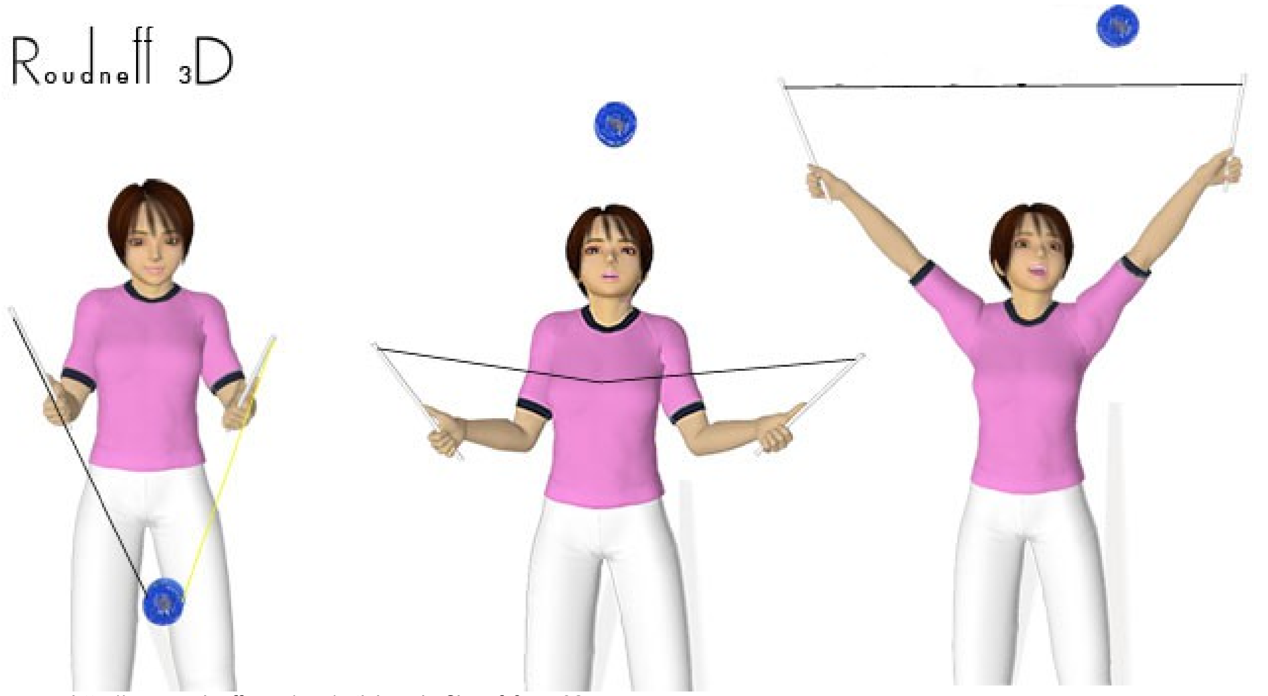
Titre : Le lancer du diabolo



Source : http://eps.roudneff.com/eps/articles.php?lng=fr&pg=92

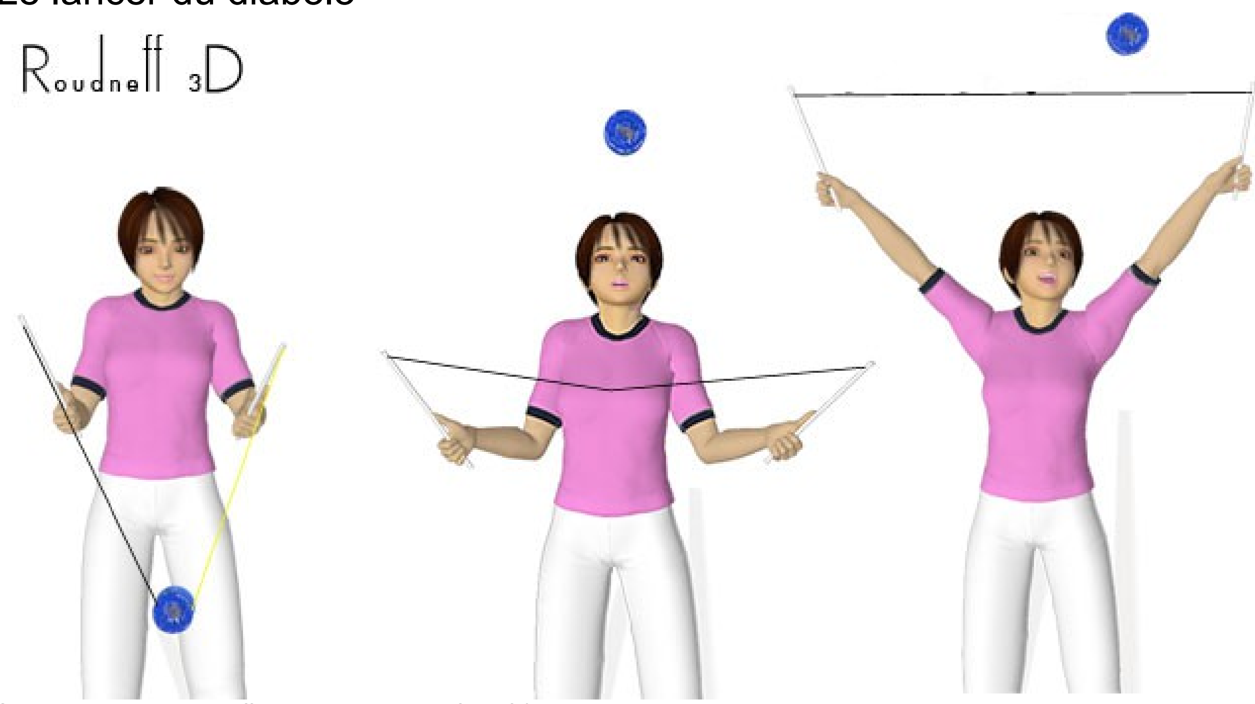
Degré : 1^{e} du Collège ; 1^{e} de l'ECG.

Durée : 95 minutes ou 45 minutes, si les élèves sont guidés.

Résumé :
Cette activité traite de fonctions quadratiques (ou paraboliques). Le but est de trouver le sommet d'une parabole concave. Elle est liée au problème concret du lancer d'un objet en l'air, tel qu'un diabolo, ayant un résultat surprenant. Il peut être avantageux que les élèves n'aient pas encore vu cette notion, pour leur faire découvrir par différentes méthodes la notion de parabole et de son sommet.

Elle fait intervenir la 2^{e} identité remarquable et le graphique d'une parabole. Elle permet de vérifier un résultat de plusieurs manières.

Le lancer du diabolo



Source : http://eps.roudneff.com/eps/articles.php?lng=fr&pg=92

En lançant un diabolo verticalement en l'air, depuis 1,8 mètres du sol, à une vitesse de 72 kilomètres par heure sa hauteur en mètres en fonction du temps t en secondes peut être approximé par :

$$h(t) = -5 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 1{,}8$$

Une question qui se posera est de savoir la hauteur maximale atteinte.

a) Transformez la vitesse de 72 [km / h] en [m / s].

b) Justifiez qu'au temps t = 0 [s], le diabolo se trouve à une hauteur de 1,8 mètre. Après combien de temps le diabolo sera revenu à la hauteur de 1,8 mètre ?

c) Montrez que $h(t) = -5 \cdot (t^2 - 4 \cdot t + 4) + 21{,}8$.

d) Factorisez l'expression obtenue en c), puis déterminez la hauteur maximale atteinte par le diabolo et l'instant auquel cette hauteur est atteinte.

e) Tracez le graphique de la fonction h et vérifiez vos résultats précédents.

f) Si le diabolo est lancé avec une vitesse initiale de V_{init} [m/s], sa hauteur en fonction du temps sera approximé par : $h(t) = -5 \cdot t^2 + V_{init} \cdot t + 1{,}8$.
Avec quelle vitesse V_{init} faut-il le lancer pour qu'il atteigne une hauteur maximale de 30 mètres ?

Titre : Le lancer du diabolo

Degré : 1e du collège ; 1e de l'école du culture générale.

Prérequis :
Les notions mathématiques utilisées dans cette activité sont les fonctions quadratiques, la factorisation utilisant la 2e identité remarquable et les graphiques. Il n'est pas nécessaire d'avoir vu les fonctions quadratiques avec les élèves et il est préférable que les élèves ne sachent pas résoudre une équation du second degré.

Objectifs :
Introduire la notion de fonction quadratique, de parabole et de sommet de parabole.

Matériel :
De quoi écrire, des feuilles de papier et une calculatrice sont indispensables.
Une feuille de papier quadrillée est nécessaire pour tracer un graphique.

Durée estimée :
Une partie de l'activité peut se faire en 45 minutes ou moins si les élèves sont guidés au départ.
Elle peut se faire en 95 minutes, par groupes de 2 élèves, si on leur demande un rapport écrit à la fin.

Proposition de déroulement :
Annoncer un cours à l'avance qu'une activité de 95 minutes à réaliser par groupes de deux élèves aura lieu le cours suivant, avec un rapport écrit à rendre à la fin. Il est conseillé d'annoncer qu'il sera noté. Cela stresse un peu les élèves, mais cela les stimule et comme la note est souvent bonne, ils terminent avec une belle satisfaction.
Indiquer qu'une règle et une calculatrice seront nécessaires, ainsi que de quoi écrire. Des feuilles quadrillées pour tracer des graphique sont également nécessaires.
Le jour de l'activité, distribuer la feuille d'énoncé à chaque élève. Les laisser 5 minutes seuls face au problème, pour qu'ils le lisent et imaginent des pistes de départ.
Ensuite, laisser les groupes se former et laisser les élèves attaquer le problème. Passer auprès des groupes régulièrement, les écouter, mais ne pas trop les aider.
Rappeler après 45 minutes qu'un rapport écrit est demandé et les inciter à commencer la rédaction des résultats partiels.

Analyse à priori de l'activité :
La conversion de la vitesse en [m/s] permettra aux élèves de donner un sens au nombre "20" qui multiplie le temps dans la fonction décrivant la hauteur en fonction du temps.

La résolution de l'équation h(t) = 1,8 est plus facile qu'on ne l'imagine au départ, vu l'élimination du terme constant. Ne pas voir la solution immédiatement bloquera certain élèves.

Le développement de l'expression $-5\cdot\left(t^2-4\cdot t+4\right)+21{,}8$ ne devrait pas poser de difficultés. L'utilisation de la 2e identité remarquable devrait également se faire rapidement.

Plusieurs élèves ne sauront pas comment aborder la question concernant la hauteur maximale atteinte par le diabolo. Il devront se rendre compte que la forme $h(t)=-5\cdot(t-2)^2+21{,}8$ est utile ici. Se rendre compte que le terme $-5\cdot(t-2)^2$ est toujours négatif ou nul prendra du temps pour plusieurs élèves. Certain groupes devront être guidé à ce stade.

Le choix des axes avec leurs valeurs extrêmes sera une nouvelle source de difficultés. Le soin apporté au tracé du graphique est important, avec son titre et la légende des axes.

La dernière question peut être optionnelle. C'est la plus compliquée de toutes, mais il est intéressant de voir comment certains élèves l'aborderont. Certaines approches par tâtonnement se feront certainement. Il est important qu'ils se rendent compte rapidement que le facteur qui multiplie "t" doit être supérieur à 20.

Une **variante possible** est d'éliminer la question f) ou de la simplifier en demandant la hauteur maximale atteinte si $h(t)=-5\cdot t^2+25\cdot t+1{,}8$.
La factorisation en : $h(t)=-5\cdot(t-2{,}5)^2+33{,}05$ sera une difficulté supplémentaire.

Résolution.

a) $72[km/h] = \dfrac{72 \cdot 1'000\,[m]}{3'600\,[s]} = \dfrac{72\,[m]}{3{,}6\,[s]} = 20\left[\dfrac{m}{s}\right]$.

Le nombre 20 qui multiplie le temps t est la vitesse initiale.

b) $h(t) = -5 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 1{,}8$, donc $h(0) = -5 \cdot 0^2 + 20 \cdot 0 + 1{,}8 = 1{,}8$ mètres.

On cherche t pour que : $h(t) = -5 \cdot t^2 + 20 \cdot t + 1{,}8 = 1{,}8$.

Cela mène à l'équation : $-5 \cdot t^2 + 20 \cdot t = 0$, donc : $5t \cdot (4 - t) = 0$.

Il y a deux solutions, qui sont t = 0 [s], au départ et t = 4 [s], qui est le temps après lequel le diabolo sera revenu au départ.

c) Il suffit de développer : $-5 \cdot \left(t^2 - 4 \cdot t + 4\right) + 21{,}8$ = $-5t^2 + 20t - 20 + 21{,}8 = -5t^2 + 20t + 1{,}8$.

On trouve bien la fonction h.

d) La deuxième identité remarquable permet de factoriser l'expression précédente :

$h(t) = -5 \cdot (t - 2)^2 + 21{,}8$.

Le terme $-5 \cdot (t - 2)^2$ est le produit d'un nombre négatif par le carré d'un nombre. Le carré d'un nombre étant toujours positif ou nul, le terme est donc négatif ou nul.

En conséquence, $h(t) = -5 \cdot (t - 2)^2 + 21{,}8$ est toujours plus petit ou égal à 21,8.

Il est égal à 21,8 lorsque t = 2. Donc la hauteur maximale atteinte par le diabolo est de 21,8 mètres, 2 secondes après le lancé.
C'est une hauteur réaliste, il est effectivement assez facile qu'un lancé de diabolo dure plus de 4 secondes. Cela signifie qu'*il atteint le 7^{e} étage d'un immeuble !*
Ce résultat est surprenant.

e) Un graphique est donné sur la page suivante.

f) Pour atteindre 30 mètres, il faut que la fonction puisse se factoriser sous la forme :

$h(t) = -5 \cdot (t - t_{max})^2 + 30$. En développant, on obtient : $h(t) = -5 \cdot t^2 + 10 \cdot t_{max} \cdot t + 30 - 5 \cdot t_{max}^2$.

Cette fonction doit être égale à $h(t) = -5 \cdot t^2 + V_{init} \cdot t + 1{,}8$, donc il faut que :

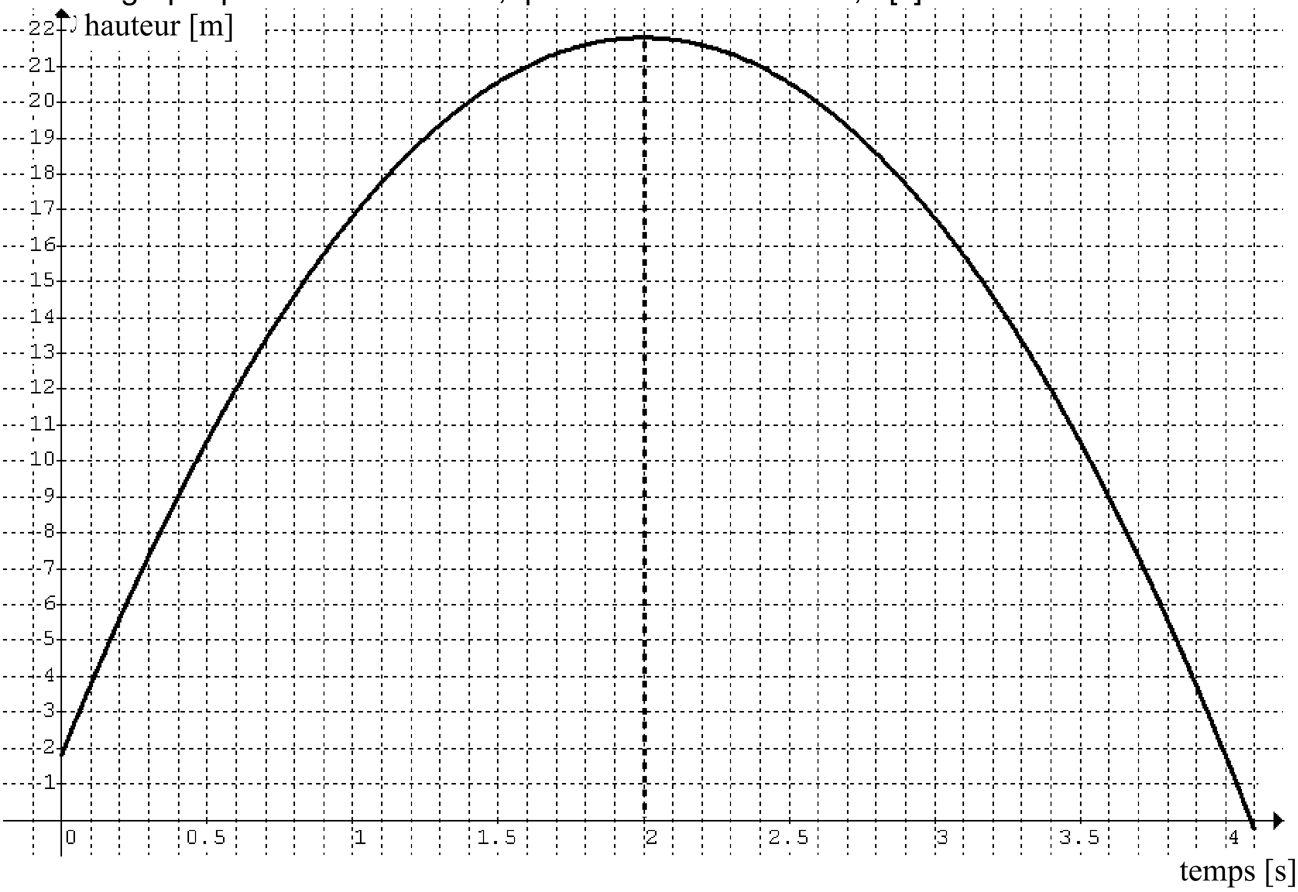
$30 - 5 \cdot t_{max}^2 = 1{,}8$ et que $10 \cdot t_{max} = V_{init}$.

Donc $t_{max}^2 = \dfrac{30 - 1{,}8}{5} = 5{,}64$, $t_{max} = +\sqrt{5{,}64} \approx 2{,}37$ [s] et $V_{init} \approx 10 \cdot 2{,}37 = 23{,}7$ [m/s].

$V_{init} \approx 85{,}5$ [km/h].

Il faut lancer le diabolo à une vitesse de 85,5 [km/h] pour atteindre une hauteur maximale de 30 mètres, ceci 2,37 secondes après le lancé.

Voici un graphique de la fonction h, pour t variant de 0 à 4,1 [s].



On constate que le maximum est juste en-dessous de 22 mètres, au temps t = 2 secondes.