Titre : Le plus grand cornet de pop-corn

Degré : 3e du Collège.

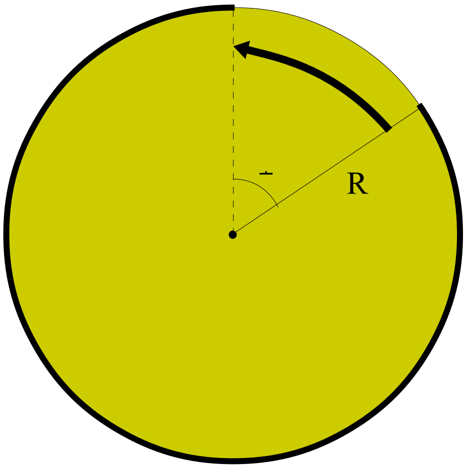
Durée : 95 minutes ou 45 minutes, si les élèves sont guidés.

<u>Résumé :</u>
Cette activité traite d'optimisation. Le but est de déterminer le cône de plus grand volume, pouvant être fabriqué à partir d'une feuille de papier ayant la forme d'un disque. Elle est liée à la notion de dérivée, permettant de trouver le maximum d'une fonction. Cette notion doit avoir été vue pour réaliser cette activité.
La modélisation consistant à exprimer le volume du cône en fonction de la découpe de la feuille de papier sera une difficulté, de même que la détermination des liens entre les différentes grandeurs du disque et du cône.

Cette activité fait partie de la grande famille des problèmes d'optimisations. Elle est classique, mais fait partie de ceux qui sont les plus difficiles à aborder pour les élèves.

Le plus grand cornet de pop-corn

Étant donné une feuille de papier ayant la forme d'un disque de rayon R = 10 cm, on désire la couper selon un de ses rayons, pour en former un cône de volume maximal.



a) Faites un dessin en grand du cône. A quel endroit le rayon R du disque de la feuille de papier se retrouve sur le cône ?

b) Quel lien y a-t-il entre la hauteur h du cône, le rayon r de sa base et le rayon R du disque de la feuille de papier ?

c) Écrivez le volume du cône en fonction du rayon de sa base et de sa hauteur, puis en fonction du rayon de sa base, puis exprimer également son volume en fonction de sa hauteur.

d) Déterminez le volume maximal de ce cône.

e) Tracez le graphique du volume en fonction de sa hauteur et vérifier votre résultat.

f) Quel est l'angle α de découpe dans la feuille d'origine, pour atteindre cet optimum ?

Titre : Le plus grand cornet de pop-corn

Degré : 3e du collège.

Prérequis :
Les notions mathématiques utilisées dans cette activité sont les fonctions et la notion de dérivée, pour déterminer le maximum d'une fonction. Il sera nécessaire d'exprimer le volume d'un cône en fonction du rayon de sa base et de sa hauteur. Le théorème de Pythagore et le calcul littéral intervient aussi.

Objectifs :
Modéliser une situation et utiliser la notion de dérivée pour optimiser une fonction.

Matériel :
De quoi écrire, des feuilles de papier et une calculatrice sont indispensables.
Le formulaire et table CRM est utile pour connaître comment calculer le volume d'un cône.
Une feuille de papier quadrillée est nécessaire pour tracer un graphique.

Durée estimée :
Une partie de l'activité peut se faire en 45 minutes ou moins si les élèves sont guidés au départ.
Elle peut se faire en 95 minutes, par groupes de 2 élèves, si on leur demande un rapport écrit à la fin.
Si cette activité est faite individuellement, elle ressemblera trop à un exercice parmi tant d'autres. Dans ce cas il est possible de l'utiliser comme exercice dans le chapitre concernant l'optimisation, sachant qu'il sera considéré comme difficile par les élèves.

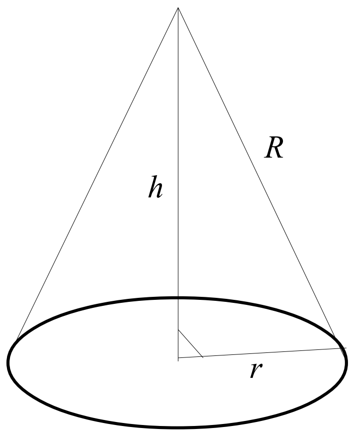
Proposition de déroulement :
Annoncer un cours à l'avance qu'une activité de 95 minutes à réaliser par groupes de deux élèves aura lieu le cours suivant, avec un rapport écrit à rendre à la fin. Il est conseillé d'annoncer qu'il sera noté. Cela stresse un peu les élèves, mais cela les stimule et comme la note est souvent bonne, ils terminent avec une belle satisfaction.
Indiquer qu'une règle et une calculatrice seront nécessaires, ainsi que de quoi écrire. Des feuilles quadrillées pour tracer des graphique sont également nécessaires.
Le jour de l'activité, distribuer la feuille d'énoncé à chaque élève. Les laisser 5 minutes seuls face au problème, pour qu'ils le lisent et imaginent des pistes de départ.
Ensuite, laisser les groupes se former et laisser les élèves attaquer le problème. Passer auprès des groupes régulièrement, les écouter, mais ne pas trop les aider.
Rappeler après 45 minutes qu'un rapport écrit est demandé et les inciter à commencer la rédaction des résultats partiels.

Analyse à priori de l'activité :
Le dessin leur permettant de voir qu'il faut appliquer le théorème de Pythagore pour relier les trois grandeurs R, r et h est une première difficulté, qui se trouvera essentiellement dans la qualité du dessin.
Les élèves devront chercher dans le formulaire et table CRM la formule donnant le volume d'un cône. Comme d'habitude, éliminer une des deux variable, r ou h de la formule du volume est une petite difficulté.
Une des deux expressions est beaucoup plus simple à dériver, ils doivent s'en rendre compte. Dans ce cas, le zéro de la dérivée s'obtient facilement. Ils ne devront pas oublier de justifier que la valeur obtenue est un maximum et non un minimum ou un point d'inflexion.
L'erreur classique de dire que la forme du graphique est une parabole sortira vraisemblablement.

Le point f) sera la question la plus difficile pour les élèves, il est possible de la laisser en bonus. De nouveau, un dessin aidera grandement à faire le lien entre le périmètre de la base du cône et une partie du périmètre du disque d'origine. Le lien entre l'angle et la partie de périmètre sera l'avant dernière difficulté pour les élèves, la partie calculatoire sera la dernière.

Une **variante possible** est d'éliminer la question f).

<u>Résolution.</u>



a) Le rayon R du disque de la feuille de papier se retrouve sur le cône comme longueur du sommet à un point de la base.

b) Le théorème de Pythagore permet de relier les trois valeurs : $R^2 = h^2 + r^2$.

c) Le volume du cône est : $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$.

On sait que $h = \sqrt{R^2 - r^2}$, donc $V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$.

On sait que $r^2 = R^2 - h^2$, donc $V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 - h^2) \cdot h$.

d) L'expression du volume en fonction de la hauteur étant plus simple qu'en fonction du rayon, c'est cette expression que nous allons garder pour optimiser le volume. Lorsque le volume est maximal, la dérivée V'(h) vaut 0.

$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 \cdot h - h^3)$, $V'(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (R^2 - 3h^2)$.

Le volume est nul lorsque $3h^2 = R^2$, donc lorsque $h = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R$. Pour R = 10 cm, h ≈ 5,7735 [cm].

V'(h) est positif pour $h < \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R$ et V'(h) est négatif pour $h > \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R$, donc $h = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R$

représente un maximum et le volume maximum est : $V_{max} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(R^2 - \frac{R^2}{3} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot R$.

Cela donne : $\boxed{V_{max} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi}{27} \cdot R^3}$. Pour R = 10 cm, V ≈ 403,07 [cm^3].

On en déduit que : $r = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$. Pour R = 10 cm, r ≈ 8,165 [cm].

e) Un graphique est donné sur la page suivante.

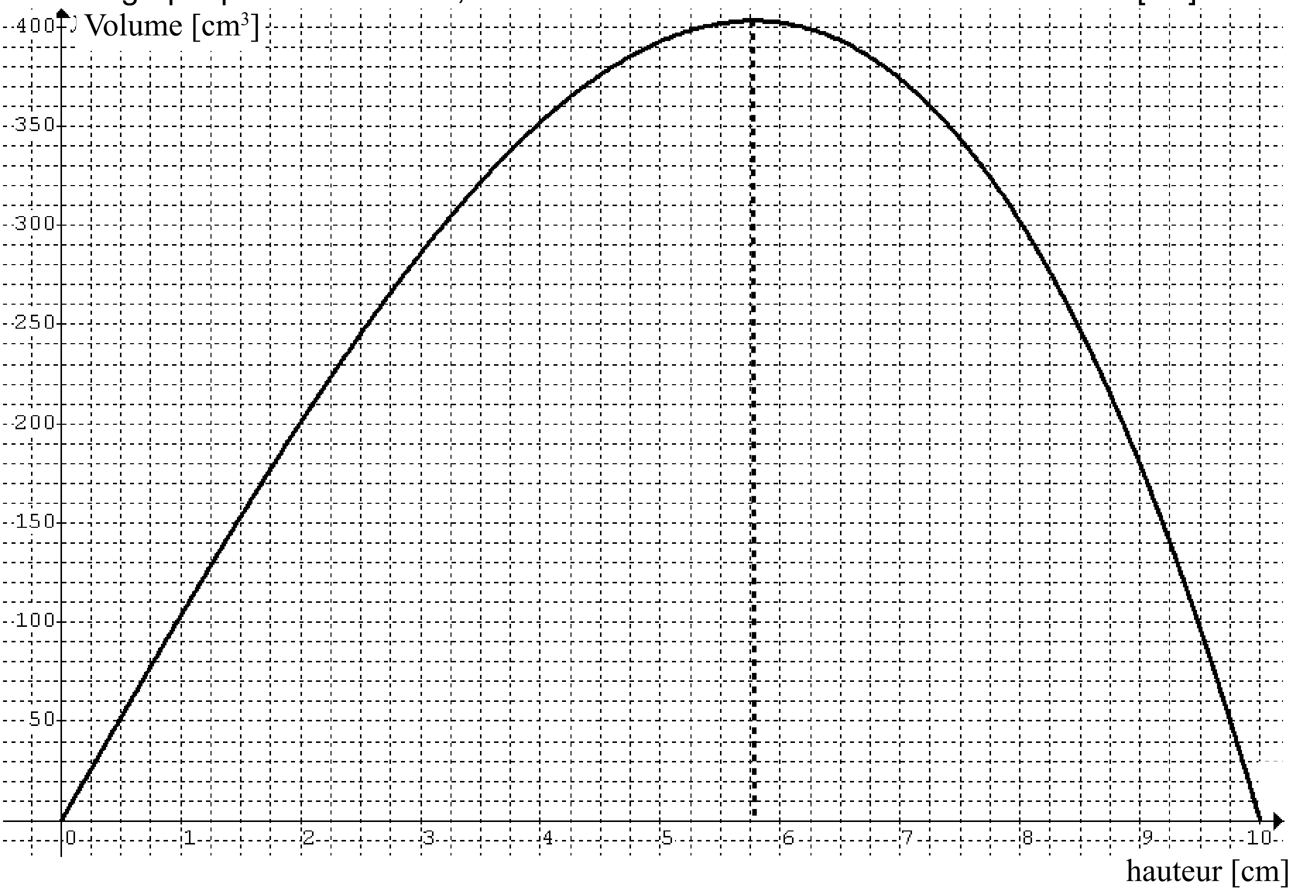
f) Cette dernière question est l'une des plus difficile. Il faut remarquer que la circonférence de la base du cône est égale à la longueur du trait gras du dessin donné dans l'énoncé et que cette longueur est égale à $\frac{360° - \alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$.

On a donc : $\frac{360° - \alpha}{360°} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot R$

Cela se simplifie en : $1 - \frac{\alpha}{360°} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, donc $\alpha = 360° \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \approx 66{,}06°$.

Il faut découper un secteur d'angle d'environ 66° de la feuille d'origine, pour obtenir un cône de volume maximal.

Voici un graphique du volume V, en fonction de la hauteur h variant de 0 à 10 [cm].



On constate que le maximum approximativement pour h = 5,75 cm.