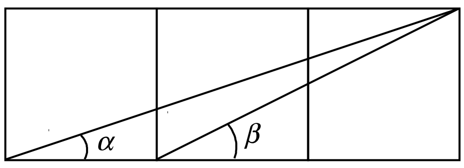
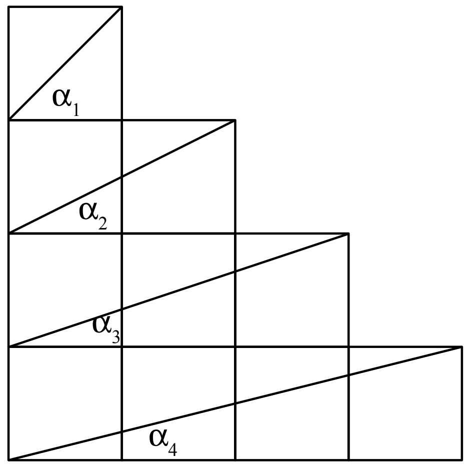
Titre : Les remarquables triplets d'angles.





Degrés : 2e du Collège
1e – 3e de l'ECG.

Une version pour la 11CO se trouve dans un autre fichier.

Durée : 45 minutes ou 95 minutes, selon l'objectif.

<u>Résumé :</u>

Prenez le dessin de gauche ci-dessus, constitué de la juxtaposition de trois carrés.

La trigonométrie permet facilement de déterminer la somme des deux angles : $\alpha+\beta$.

Il existe également une méthode géométrique pour trouver cette somme, qui vaut 45°.

On a donc : $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$.

Une question naturelle pour un mathématicien est de se demander si une telle autre relation existe pour les angles α_k dont on voit les définitions ci-dessus.

Une réponse complète à cette question mène à des problèmes diophantiens de niveau universitaire.

Des questions intermédiaires peuvent s'adresser à des élèves du post-obligatoire.

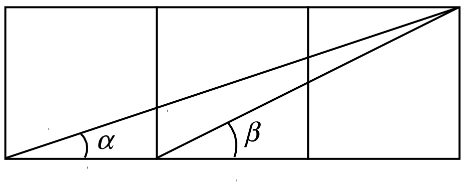
Chaque fois, la trigonométrie permet de trouver des relations similaires entre trois angles α_k, ainsi que des approches géométriques.

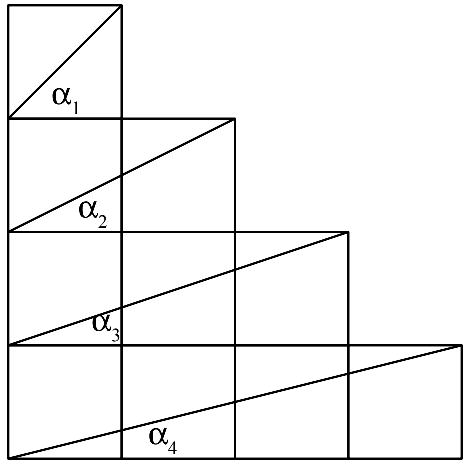
Donc la notion d'arc-tangente est la principale notion à utiliser, ainsi que des considérations de géométrie élémentaire.

Un atout de cette activité est qu'il y a des listes illimitées de remarquables triplets d'angles et que seul un niveau universitaire peut tous les cataloguer. Donc la recherche au niveau du collège est illimitée.

Elle peut donc être abordée expérimentalement à l'école primaire et au C.O., pour être étudiée en profondeur à l'université.

Les remarquables triplets d'angles





a) Prenez le dessin de gauche ci-dessus, constitué de la juxtaposition de trois carrés.
Déterminer la somme des deux angles : $\alpha+\beta$.

b) Vérifiez par une méthode géométrique et une méthode trigonométrique que vous obtenez bien le même résultat par ces deux approches.

On définit les angles α_1, α_2, α_3, α_4, et ainsi de suite, selon le dessin de droite ci-dessus, où tous les carrés sont juxtaposés.
En a) vous avez montré que $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$.

c) Montrez que $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_7$.

d) Montrez que $\alpha_3 = \alpha_4 + \alpha_k$. où k est à déterminer.

e) Montrez que $\alpha_3 = \alpha_5 + \alpha_n$. où n est à déterminer.

f) Trouvez d'autres relations similaires...

Titre : Les remarquables triplets d'angles

Degré : 2^{e} du collège ; école de culture générale.
Une version pour la 11^{e} HarmoS du C.O. se trouve dans un autre fichier.

Prérequis :
La principale notion mathématique utilisée dans cette activité est la trigonométrie, avec la notion d'arc-tangente. Pour aller plus loin, la formule de la tangente de la somme de deux angles est utile. Des approches de géométrie élémentaire, utilisant la notion de triangles semblables, sont possibles.

Objectifs :
Ce problème est une curiosité. La base peut être abordé à l'école primaire, en traçant des angles et en les mesurant avec un rapporteur. Ensuite, il peut être abordé au niveau du cycle d'orientation, en leur faisant dessiner des constructions géométriques et raisonner sur des triangles semblables. Au niveau du post-obligatoire, la trigonométrie intervient dans les résolutions. Au niveau universitaire, ce problème mène à des équations diophantiennes, donc cherchant des solutions dans les nombres entiers.
En résumé, cette activité mène à utiliser des rapporteurs, de la géométrie élémentaire, la similitude de triangles, la trigonométrie et plus si on est très curieux.

Matériel :
De quoi écrire, des feuilles de papier quadrillé et une règle sont indispensables. Un rapporteur et une calculatrice sont souhaitables.
On peut imprimer sur des acétates, des rapporteurs se trouvant dans les fichiers : Rapporteur.odg et Rapporteur.pdf, puis les faire découper par ceux qui veulent.

Durée estimée :
Une partie de l'activité peut se faire en 45 minutes ou moins si les élèves sont guidés au départ et si on se limite aux premières questions.
Elle peut se faire en 95 minutes, par groupes de 2 élèves, si on leur demande un rapport écrit à la fin.

Proposition de déroulement pour le collège :
Annoncer un cours à l'avance qu'une activité de 95 minutes à réaliser par groupes de deux élèves aura lieu le cours suivant, avec un rapport écrit à rendre à la fin. Il est conseillé d'annoncer qu'il sera noté. Cela stresse un peu les élèves, mais cela les stimule et comme la note est souvent bonne, ils terminent avec une belle satisfaction.
*Indiquer qu'un **rapporteur**, une **règle** et une **calculatrice** seront nécessaires, ainsi que de quoi écrire et des **feuilles quadrillées**.*
Le jour de l'activité, distribuer la feuille d'énoncé à chaque élève. Les laisser 5 minutes seuls face au problème, pour qu'ils le lisent et imaginent des pistes de départ.
Ensuite, laisser les groupes se former et laisser les élèves attaquer le problème. Passer auprès des groupes régulièrement, les écouter, mais ne pas trop les aider.

Analyse à priori de l'activité :

Une première approche possible est de mesurer les angles α et β , pour constater que leur somme fait 45°.

A l'aide de la trigonométrie, d'obtenir : $\alpha+\beta = \arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$ devrait être assez simple.

Montrer rigoureusement que $\tan(\alpha+\beta) = 1$ sera beaucoup plus difficile.

L'approche géométrique sera plus difficile à trouver, ce qui montre que la trigonométrie est un outil puissant de résolution de problèmes.

Par tâtonnement, en calculant à l'aide d'arc-tangentes les divers angles α_1, α_2, α_3, α_4, ..., les élèves observeront que $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_7$.

On peut à cette étape leur donner la formule : $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$, pour qu'ils constatent que : $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\frac{1}{3}+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}$ et fassent le lient avec $\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{k}\right)\right) = \frac{1}{k}$.

La construction géométrique correspondante à cette égalité devrait être plus simple à trouver si celle de la première étape a été trouvée.

Ensuite, le tâtonnement, puis les méthodes vues précédemment devrait aider.

Il ne faut pas espérer une grande avancée dans la découverte de formules similaires, mais il est bon de laisser le problème ouvert.

Ils peineront à se mettre à la rédaction du rapport d'activité, il faut donc les inciter plusieurs fois à rédiger leurs idées.
Des erreurs peuvent provenir du fait que seul deux chiffres significatifs de la calculatrice seront notés et donc la précision insuffisante pourrait les induire à des triplets d'angles qui ne sont pas remarquables.

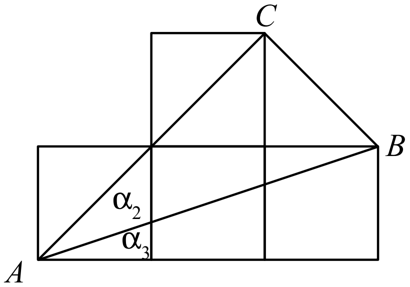
Variantes et/ou développements possibles :

Suivant le niveau des élèves, on peut éliminer la question f). On peut également leur donner un dessin de base pour la construction géométrique montrant que $\alpha+\beta = 45°$.

On peut également leur donner la formule $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$ dès le début de l'activité.

Résolution.

Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ de manière géométrique.



ABC est un triangle rectangle, dont le côté [*AC*] et deux fois plus long que le côté [*BC*], il est donc semblable au triangle définissant l'angle α_2 ce qui justifie que l'angle *CAB* vaut α_2.
Le dessin montre donc que $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 = 45°$.

Montrons que $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$ à l'aide de la trigonométrie, ainsi que beaucoup d'autres formules.

De manière générale, les angles sont définis par la relation $\alpha_k = \arctan\left(\frac{1}{k}\right)$.

On a : $\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 \approx 26{,}56505°$; $\alpha_3 \approx 18{,}43495°$; $\alpha_4 \approx 14{,}03624°$

$\alpha_5 \approx 11{,}30993°$; $\alpha_6 \approx 9{,}46232°$; $\alpha_7 \approx 8{,}13010°$

Une relation $\alpha_k = \alpha_m + \alpha_n$ s'écrit donc : $\arctan\left(\frac{1}{k}\right) = \arctan\left(\frac{1}{m}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)$.

En prenant la tangente de chaque membre de l'égalité, cela devient :

$$\frac{1}{k} = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{m}\right) + \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}{1 - \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{n}}$$

La dernière égalité s'obtient par la formule de la tangente d'une somme d'angles.

Le tout se ramène à : $k \cdot m + k \cdot n + 1 = m \cdot n$ ou à : $n = \frac{k \cdot m + 1}{m - k}$.

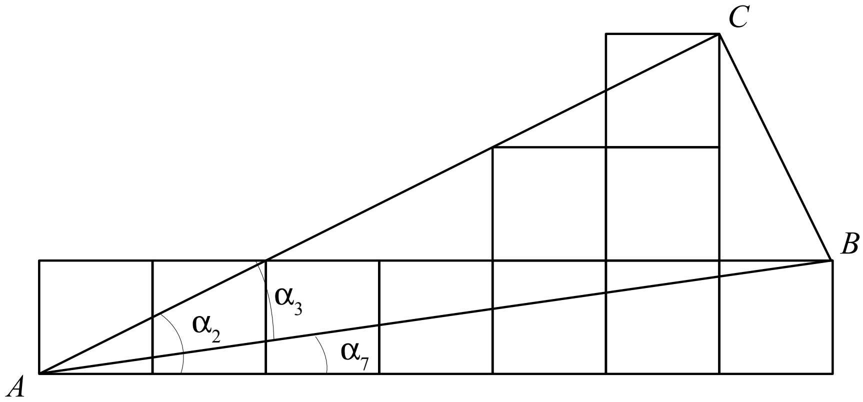
L'égalité $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3$, est confirmée par l'égalité suivante :

$$\frac{1}{1} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}},$$ k = 1 ; m = 2 et n = 3.

Empiriquement on constate que $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_7$, ce qui se confirme en constatant que :

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}},$$ k = 2 ; m = 3 et n = 7.

Montrons que $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_7$ de manière géométrique.



ABC est un triangle rectangle, dont le côté [*AC*] est trois fois plus long que le côté [*BC*], il est donc semblable au triangle définissant l'angle α_3 ce qui justifie que l'angle *CAB* vaut α_3.
Le dessin montre donc que $\alpha_3 + \alpha_7 = \alpha_2$.

On a vu que : $n = \dfrac{k \cdot m + 1}{m - k}$, donc $n = \dfrac{k \cdot (k + d) + 1}{d} = k + \dfrac{k^2 + 1}{d}$ où d = m - k.

Dans le cas particulier où *m* = *k* + 1, (d = 1) on a : $n = k^2 + k + 1$.

Dans le cas particulier où *m* = *k* + 2, (d = 2) et *k* = 2 · *j* + 1 est impair, on a : $n = 2 \cdot (j+1)^2$.
Si *m* = *k* + 3, (d = 3), il n'y a aucune valeur entière de *n* possible.

Voici des tableaux de valeurs

k	*m=k+1*	*n*		*k*	*m=k+2*	*n*		*k*	*m*	*n*
1	2	3		3	5	8		7	12	17
2	3	7		5	7	18		8	13	21
3	4	13		7	9	32		12	17	41
4	5	21		9	11	50		13	18	47
5	6	31		11	13	72		17	22	75
6	7	43		13	15	98		18	23	83
7	8	57		15	17	128		etc.		
8	9	72		etc.						
9	10	91								
10	11	111								
11	12	133								

Le problème général revient à déterminer les valeurs de k et de d telles que :
$k^2 \equiv -1 \bmod d$.

Il n'y a pas de solutions pour d dans { 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; ??? }
Il y a des solutions pour d dans { 1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 13 ; ??? }