Titre : Evolution de la population d'un village

Degré et filière : 2e année du Certificat de l'Ecole de Culture Générale
1e - 2e du Collège (maximum d'une fonction quadratique)
3e troisième année du Collège (optimisation grâce au calcul du zéro d'un polynome dérivé)

Durée : au maximum 45 minutes

Résumé :

Cette activité traite concrètement la question : « Comment calculer le maximum d'une fonction polynomiale du second degré ?».

Les principales connaissances mathématiques utilisées sont liées à l'étude des fonctions polynômiales du second degré. Une des difficultés consiste à identifier la valeur maximale prise par la fonction sur l'intervalle pertinent. La représentation graphique de la fonction peut aider à l'élaboration du chemin de résolution du problème posé.

Evolution de la population d'un village

Après analyse, des démographes font des projections démographiques concernant la population d'un village de la campagne genevoise. Ils estiment que l'effectif de la population du village dans n années à compter d'aujourd'hui, peut être modélisé et calculé grâce à la fonction suivante :

$$P: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow P(n) = 3000 - n^2 + 70 \cdot n$$

Au bout de combien d'années l'effectif de la population de ce village sera-t-il maximal ?

Titre : Evolution de la population d'un village

Degré et filière : 2e année du Certificat de l'Ecole de Culture Générale
1e - 2e du Collège (maximum d'une fonction quadratique)
3e troisième année du Collège (optimisation grâce au calcul du zéro d'un polynome dérivé)

Prérequis ou savoirs/savoir-faire en cours d'acquisition :
- La capacité à représenter la parabole correspondant à une fonction polynomiale du second degré.
- La connaissance et la maitrise des fonctions polynomiales du second degré de forme générale $f(X)=a\cdot X^2+b\cdot X+c$, en particulier le calcul de l'extremun de la fonction grâce à l'identification de son axe de symétrie : $X=-\frac{b}{2\text{a}}$.

Objectifs :

Exploiter analytiquement la fonction mathématique qui modélise la situation.

Matériel : De quoi écrire et une calculatrice.

Durée estimée : L'activité peut être réalisée en moins de 30 minutes si les élèves maitrisent les formules, en 45 minutes sinon.

Proposition de déroulement :

Annoncer lors du cours précédent qu'une activité de 30 minutes sera réalisée par groupes de deux élèves durant le cours suivant, avec un rapport écrit à rendre à la fin. Afin que les élèves soient dans les meilleures dispositions, il pourrait être utile d'annoncer que ce travail sera noté.

Le jour de l'activité, distribuer la feuille d'énoncé à chaque élève. Les laisser 5 à 10 minutes seuls face au problème, pour qu'ils le lisent et imaginent des pistes de départ.

Ensuite, laisser les groupes se former et laisser les élèves attaquer le problème. Passer auprès des groupes régulièrement, les écouter, mais ne pas trop les aider. Leur suggérer de faire une représentation du graphe de la fonction modélisant la situation, s'il n'est pas fait spontanément.

Rappeler après 10 minutes qu'un rapport écrit est demandé et les inciter à commencer la rédaction des résultats partiels.

Reformuler le problème avec leurs propres mots est un bon exercice. De même, il est souhaitable de résumer les résultats principaux dans la conclusion, avec des phrases en français.

Analyse a priori de l'activité :

Beaucoup d'élèves ne penseront pas à faire une représentation du graphe de la fonction comme soutien lors de l'exploration du problème.

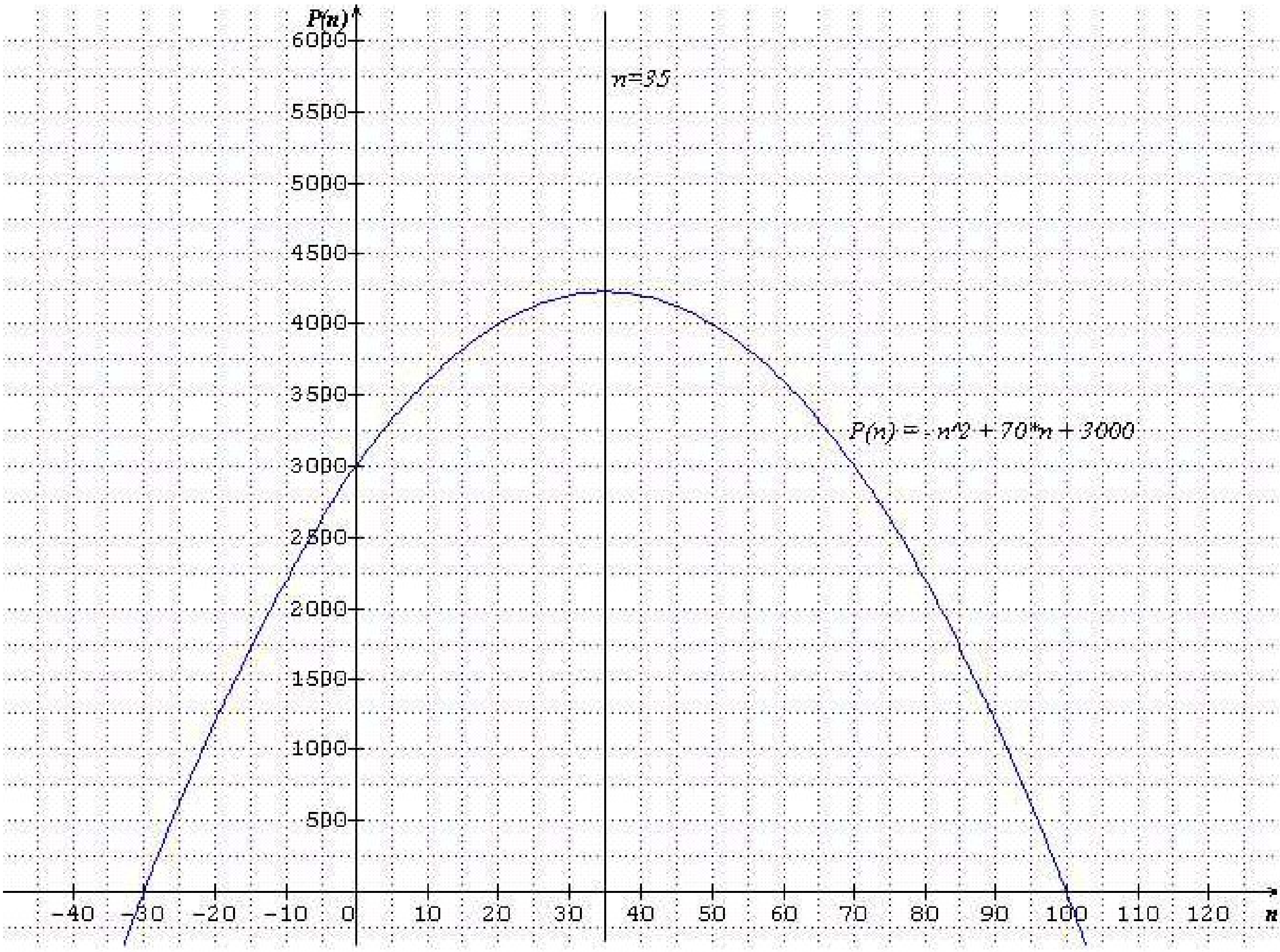
Des élèves pourraient mettre en oeuvre des démarches « anarchiques » comme effectuer des calculs à tâtons, d'autres pourraient mettre en oeuvre des démarches méthodiques en produisant par exemple un tableau de valeurs afin d'organiser les calculs.

L'idée d'utiliser l'équation de l'axe de symétrie de la parabole afin d'identifier numériquement le maximum de la fonction constituera l'astuce essentielle et certainement le principal challenge didactique.

La rédaction d'une conclusion est souvent oubliée. Pourtant elle est importante et il faut insister pour avoir une conclusion développée avec des phrases en français. Ce n'est pas parce qu'ils sont en cours de mathématiques, que les explications et les rédactions en français peuvent être négligées.

<u>Résolution à l'aide de la détermination de l'axe de symétrie</u>

Il est conseillé de représenter le graphe de la fonction polynômiale du second degré.



1. Détermination de l'équation de l'axe de symétrie de la parabole

De l'expression générale $x = -\dfrac{b}{2a}$ et de la fonction $P(n) = 3000 - n^2 + 70 \cdot n$ on déduit

l'équation de l'axe de symétrie de la parabole $n = -\left(\dfrac{70}{-2}\right) \Leftrightarrow n = 35$

2. Identification de la valeur de l'extremum de la fonction

Celle valeur correspond à l'ordonnée du point qui appartient à la fois à la parabole liée à la fonction polynomiale du second degré et à la droite verticale qui est l'axe de symétrie de cette parabole.

$P(35) = 3000 - 35^2 + 70 \cdot 35 = 4'225$

Ainsi, l'effectif de la population du village sera maximal 35 ans plus tard.

Résolution à l'aide du calcul de la dérivée

On calcule l'extremum de la fonction en identifiant le zéro de sa fonction dérivée.

$$P(n) = 3000 - n^2 + 70 \cdot n$$

$$P'(n) = -2 \cdot n + 70$$

$$P'(n) = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot n + 70 = 0 \Leftrightarrow -2 \cdot n = -70 \Leftrightarrow n = 35$$

De même que pour la méthode de résolution précédente, l'effectif de la population du village sera maximal 35 ans plus tard.