Titre : Forage de deux puits

Degrés et filières : 3e année du Certificat de l'Ecole de Culture Générale
2e année du Collège

Durée : au maximum 45 minutes.

Résumé :

Cette activité traite concrètement la question : « Comment des grandeurs physiques peuvent-elles décroître de façon exponentielle ?».

Les principales connaissances mathématiques utilisées sont les fonctions exponentielles et logarithmiques et la résolution d'équations exponentielles et logarithmiques, à l'aide de la calculatrice. Une des difficulté consiste à se représenter et représenter la situation afin de la modéliser. Le croquis de la situation est certainement indispensable pour s'orienter vers la solution.

Source : http://a396.idata.over-blog.com/2/28/28/88/Forage/Forage-puisatier-ponstp.jpg

Forage de deux puits

Une société de travaux publics réalise deux forages situés à des hauteurs différentes par rapport à une nappe phréatique. Les roches rencontrées lors des travaux sont de natures différentes et plus le forage est profond plus les roches rencontrées sont dures.

Après avoir effectué des analyses géologiques, les ingénieurs estiment que la trajectoire du forage n°1 situé à 100 mètres au-dessus de la nappe phréatique permettra de forer chaque jour le tiers de la hauteur restante. De même, ils estiment que la trajectoire du forage n°2 situé à 75 mètres au-dessus de la nappe phréatique permettra de forer chaque jour le quart de la hauteur restante.

Lequel des deux forages arrivera-t-il le premier à moins d’un mètre de la nappe phréatique ?

Source : http://a396.idata.over-blog.com/2/28/28/88/Forage/Forage-puisatier-ponstp.jpg

Titre : Forage de deux puits au dessus d'une nappe phréatique

Degrés et filières : 3e année du Certificat de l'Ecole de Culture Générale et 2e année du Collège

Prérequis :
- La capacité à représenter une situation à l'aide d'un croquis
- La connaissance et la maîtrise des fonctions exponentielles et logarithmiques : en particulier une des propriétés calculatoires de la fonction log : $\log(a)^n = n \cdot \log(a)$
- La résolution d'une équation exponentielle à l'aide de la fonction Log.
- L'utilisation de la touche Log sur la calculatrice.

Objectifs :

Ce problème traite d'un cas concret dans le "macro-espace", c'est-à-dire dans le monde qui nous entoure. Il nécessite donc une modélisation de la situation par un croquis.

Matériel :

De quoi écrire et une calculatrice.

Durée estimée : L'activité peut être réalisée en moins de 45 minutes.

Proposition de déroulement :

Annoncer lors du cours précédent qu'une activité de 45 minutes sera réalisée par groupes de deux élèves durant le cours suivant, avec un rapport écrit à rendre à la fin. Afin que les élèves soient dans les meilleures dispositions, il pourrait être utile d'annoncer que ce travail sera noté.

Le jour de l'activité, distribuer la feuille d'énoncé à chaque élève. Les laisser 5 à 10 minutes seuls face au problème, pour qu'ils le lisent et imaginent des pistes de départ.

Ensuite, laisser les groupes se former et laisser les élèves attaquer le problème. Passer auprès des groupes régulièrement, les écouter, mais ne pas trop les aider. Leur suggérer de faire un dessin de la situation, s'il n'est pas fait spontanément.

Rappeler après 25 minutes qu'un rapport écrit est demandé et les inciter à commencer la rédaction des résultats partiels.

Reformuler le problème avec leurs propres mots est un bon exercice. De même, il est souhaitable de résumer les résultats principaux dans la conclusion, avec des phrases en français.

Analyse a priori de l'activité :

Une difficulté probable pour plusieurs élèves sera de faire un dessin de la situation en précisant les données clé.

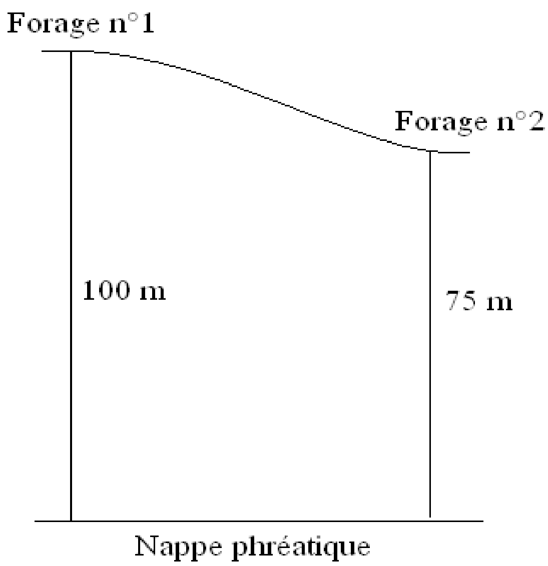
Des élèves pourraient mettre en oeuvre des démarches « anarchiques » en effectuant des calculs à taton, d'autres pourraient mettre en oeuvre des démarches méthodiques en produisant un tableau afin d'organiser les calculs.

L'expression algébrique des deux fonctions exponentielles qui traduisent les processus de forage constituera une autre difficulté.

La rédaction d'une conclusion est souvent oubliée. Pourtant elle est importante et il faut insister pour avoir une conclusion développée avec des phrases en français. Ce n'est pas parce qu'ils sont en cours de mathématiques, que les explications et les rédactions en français peuvent être négligées.

Résolution.

Il est conseillé de représenter la situation à l'aide d'un croquis.



Ensuite, il est préférable de faire apparaitre progressivement la relation numérique exprimant l'évolution du processus de forage, afin d'en déduire la relation exponentielle centrale.

Soit j: le J^e jour de forage.

Pour j=0, on a : $F_1(0) = 100$

Pour j=1, on a : $F_1(1) = 100 - \frac{1}{3} \cdot 100 = 100 \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1$

Pour j=2, on a : $F_1(2) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) - \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$

En généralisant les résultats précédents à j=n, on obtient :

$F_1(n) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ avec $F_1(0) = 100 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 100 \cdot 1 = 100$

En procédant de même avec l'autre forage, pour j=m, on obtient :

$F_2(m) = 75 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^m$ avec $F_2(0) = 75 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 75 \cdot 1 = 75$

Puis, on résout deux équations exponentielles à l'aide de la fonction log.

$$100\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 \qquad\qquad 75\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^m = 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{100} \qquad\qquad \left(\frac{3}{4}\right)^m = \frac{1}{75}$$

$$\log\left(\frac{2}{3}\right)^n = \log\left(\frac{1}{100}\right) \qquad\qquad \log\left(\frac{3}{4}\right)^m = \log\left(\frac{1}{75}\right)$$

$$n\cdot\log\left(\frac{2}{3}\right) = \log\left(\frac{1}{100}\right) \qquad\qquad m\cdot\log\left(\frac{3}{4}\right) = \log\left(\frac{1}{75}\right)$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{1}{100}\right)}{\log\left(\frac{2}{3}\right)} \qquad\qquad m = \frac{\log\left(\frac{1}{75}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$$

On en déduit les valeurs pertinentes qui permettent d'identifier la solution finale.

Pour le forage n°1 on a $n \approx 11{,}35$ et $F_1(12) \approx 0{,}77$
Au douzième jour ce forage sera à moins de 1 mètre de la nappe phréatique.

Pour le forage n°2 on a $m \approx 15{,}01$ et $F_2(16) \approx 0{,}75$
Au seixième jour ce forage sera à moins de 1 mètre de la nappe phréatique.
De plus, $F_2(12) \approx 2{,}38$

Le forage n°1 sera donc à moins de 1 mètre de la nappe phréatique environ 4 jours avant le forage n°2 qui au départ était pourtant plus proche de celle-ci de 25 m par rapport au premier forage.

Graphes des deux fonctions de forage