Numéro de la dernière page : 14

Titre : Tangram en carré

Degrés : 1e – 4e du Collège

Durée : 90 minutes

Résumé : Le jeu de Tangram (appelé en chinois les sept planches de la ruse ou jeu des sept pièces) est un des plus anciens jeux géométriques connus. Avec ces sept pièces, on peut construire bien des formes différentes.
Mais combien de carrés différents peut-on construire en utilisant seulement certaines pièces du Tangram ?
Cette question peut être déclinée de plusieurs manières en fonction du degré concerné et de vos envies.

Dans cette activité, on peut, par exemple :
1) considérer des décompositions différentes de carrés éventuellement de même aire ;
2) considérer des carrés d'aires distinctes.

Plusieurs autres questionnements similaires peuvent être trouvé dans pages qui suivent.

Tangram en carré

1) Découpez les pièces du tangram.

2) Quel est le nombre maximal de carrés que l'on peut construire à l'aide des pièces du tangram ? Pour chaque carré, toutes les pièces ne sont pas nécessairement utilisées.
   Deux carrés sont différents si les décompositions sont différentes.

3) Pouvez-vous justifiez le fait que vous avez toutes les solutions ?

Numéro de la dernière page : 14

Titre : Tangram en carré

Degrés : 1e – 4e du Collège

Prérequis :

- irrationalité de $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{15}$.
- isométries (symétries axiale et centrale, rotations)

Objectifs :

- trouver une stratégie de comptage pour dénombrer tous les carrés possibles faits avec des pièces de tangram

Objectifs spécifiques travaillés :

Matériel : pour chaque groupe

- un jeu de Tangram (pièces à découper fournies en Annexe p. 5)
- la grille donnée en page 6 (à donner lors de la recherche systématique et selon la méthode choisie)

  Truc pratique : prévoir une enveloppe par élève lui permettant de ranger ses pièces de Tangram.

  Attention : les plastifieuses classiques ne conviennent pas pour plastifier les pièces de Tangram, en effet elles ne soudent que le bord du la fourre en plastique dans laquelle la feuille est mise, mais elle ne colle pas la fourre à la feuille de papier. Quand l'enfant découpe les pièces dans la feuille plastifiée, le plastique et le papier se séparent. Il faut prendre du plastique transparent adhésif et plastifier des feuilles sur lesquelles sont imprimées au préalable les Tangrams.

Durée estimée : 90 minutes

Proposition de déroulement : L'activité se déroule en 3 parties :

Distribuer des feuilles cartonnées avec la forme du Tangram et les faire découper aux élèves.

1ère partie – Travail en groupe

Les élèves travaillent en groupes d'au plus 4 élèves.

Après que l'enseignant ait donné la consigne aux élèves sous forme orale ou écrite au tableau, les élèves travaillent par petits groupes sur la question. L'enseignant passe dans les rangs pour répondre à d'éventuelles questions.

Les élèves dessinent leurs solutions.

Lorsqu'une grande partie des groupes pense avoir trouvé toutes les solutions, passer à la mise en commun.

2e partie – Mise en commun

L'enseignant prend la feuille d'un premier groupe et dessine au tableau leurs carrés (prendre la feuille d'un groupe qui ne les a pas tous trouvés). Puis il questionne les autres groupes pour compléter la liste des carrés possibles.

Les organiser selon le nombre de pièces ou selon l'aire des carrés. Ce classement dépend de la méthode de résolution choisie par l'enseignant.

Il devrait y avoir entre 7 et 9 carrés.

Il est possible que les élèves proposent comme solutions différentes, des solutions qui diffèrent des solutions déjà présentées seulement par un mouvement du carré obtenu (isométries). En profiter pour lancer la discussion sur l'équivalence des solutions. A cet âge, il est important de voir quand deux solutions sont équivalentes (par symétrie ou rotation). SI les élèves ne proposent pas de telles solutions, l'enseignant peut en proposer pour s'assurer que les élèves ont bien acquis ce point.

Lorsque toutes les solutions proposées par les élèves sont dessinées au tableau, l'enseignant pose la question : Comment être sûr d'avoir tous les carrés possibles ?

Avec l'aide des élèves, l'enseignant met en place une stratégie de comptage (voir résolution). L'enseignant peut proposer aux élèves d'utiliser la grille présentée dans la résolution et donnée en Annexe p.6.

3e partie – Travail en groupe

Les élèves travaillent à nouveau en groupe pour effectuer leur recherche systématique et rédiger.

Quelques remarques

L'intérêt de la preuve arithmétique est qu'elle utilise l'additivité de l'aire et de la longueur et des considérations arithmétiques (irrationalités de certains nombres) qui sont souvent vues comme inutiles par les élèves.
En outre, le fait que l'irrationalité d'un nombre interdise l'existence d'une construction d'un carré en 6 pièces est assez frappante.
De plus, si les élèves ont tenté un preuve combinatoire fastidieuse et délicate, il est intéressant de remarquer que la preuve arithmétique est plus simple et plus courte.

Analyse a priori de l'activité :
Démarches prévisibles des élèves

- tâtonnements

Difficultés potentielles

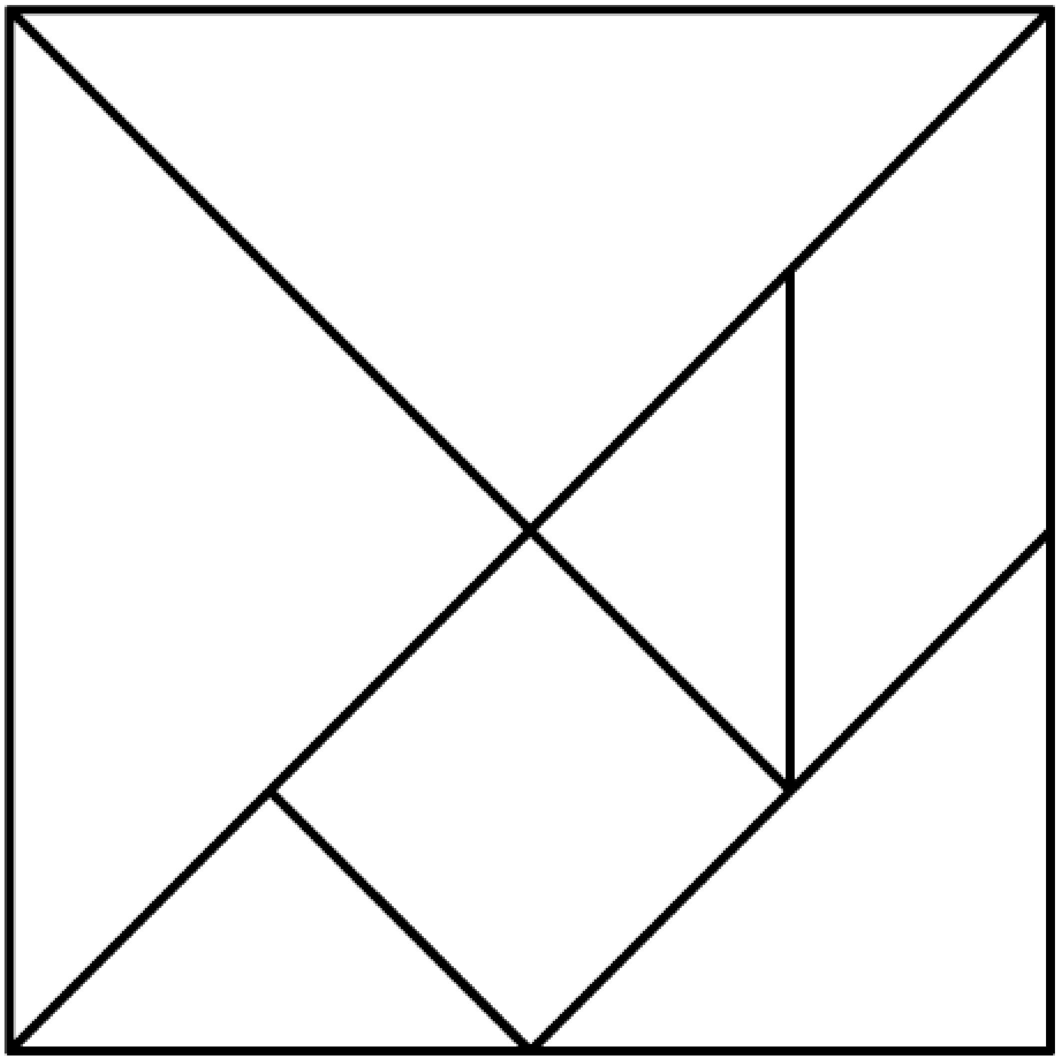
- mauvaise compréhension de la consigne
- difficultés à reproduire les solutions
- difficultés à se représenter les isométries

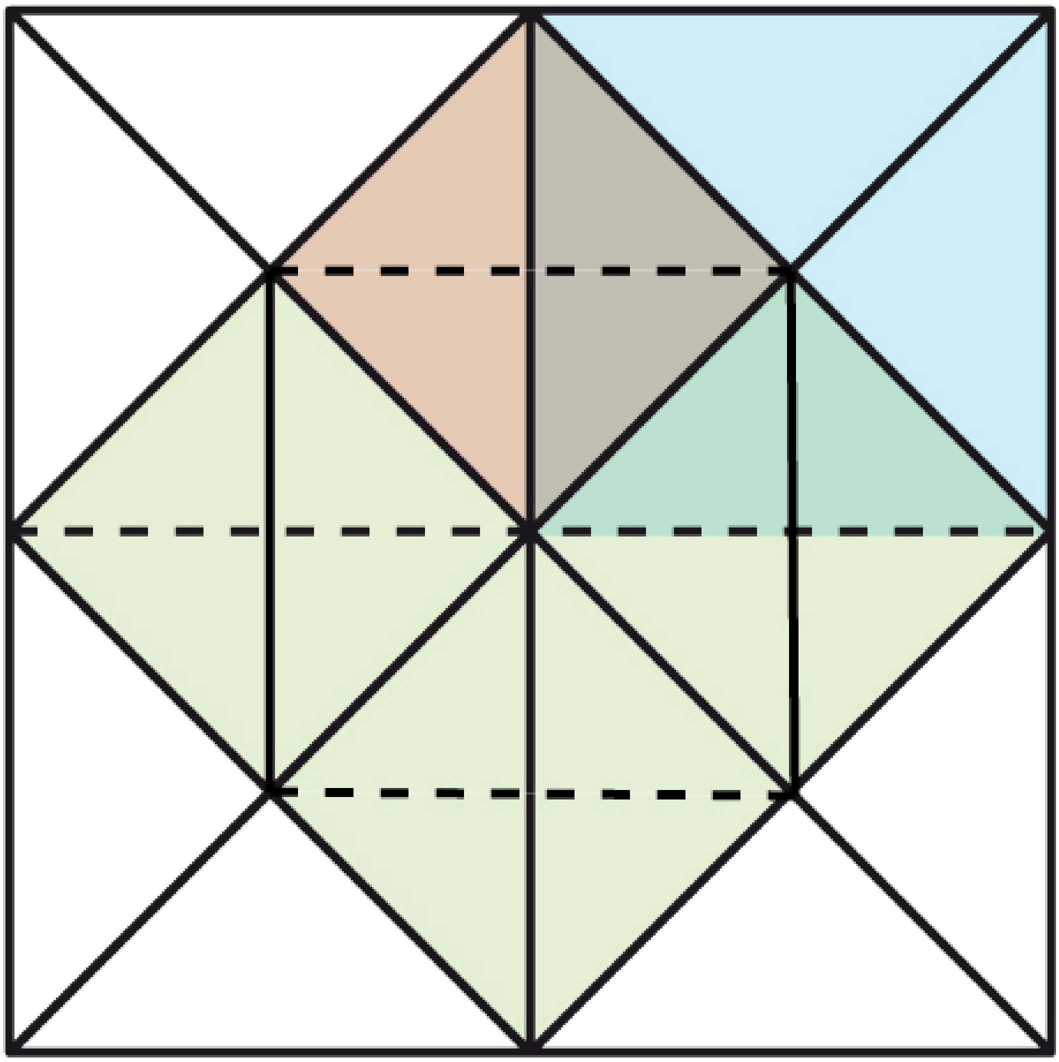
Interventions de l’enseignant
voir le Déroulement

Variantes et/ou développements possibles :

Variables didactiques :

Annexes :

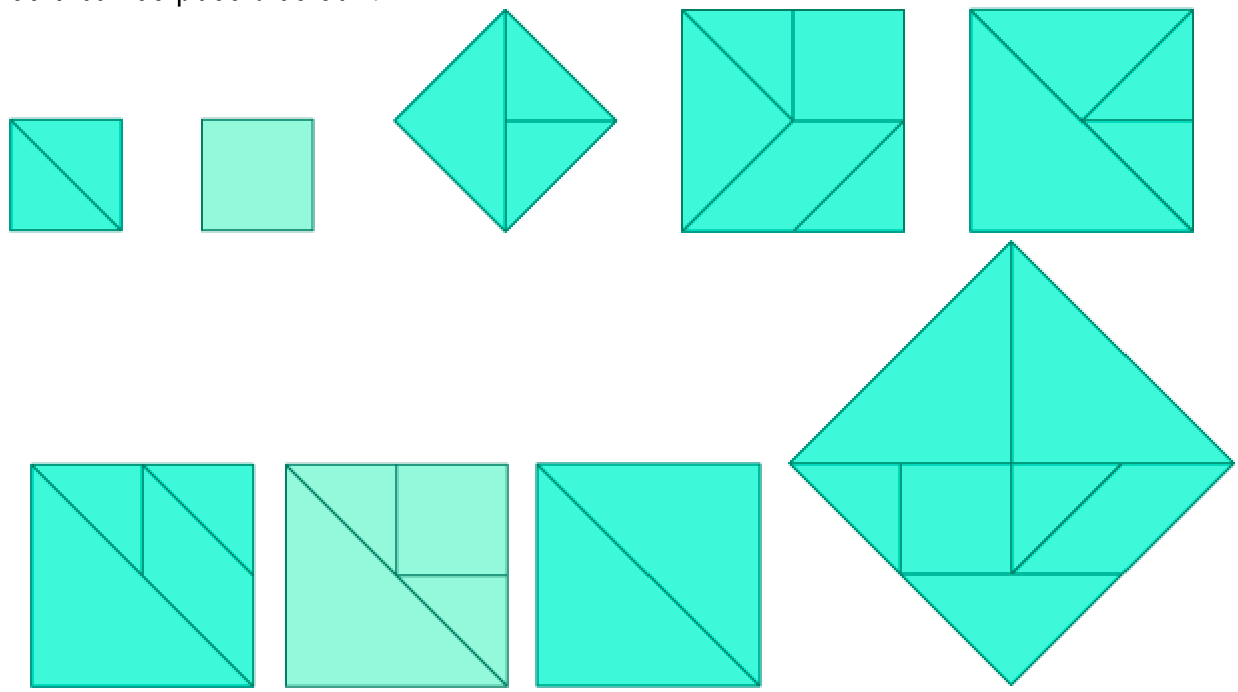




Sur cette grille, les triangles unités peuvent être disposés de deux manières : soit l'hypoténuse est placée selon un trait noir, soit elle est placée selon un traitillé.

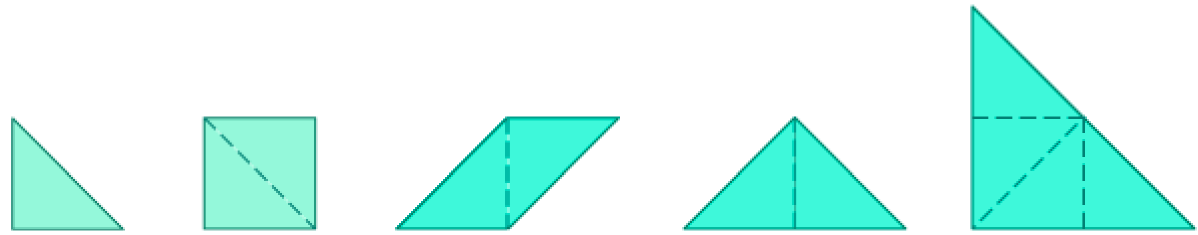
Résolution

Les 9 carrés possibles sont :



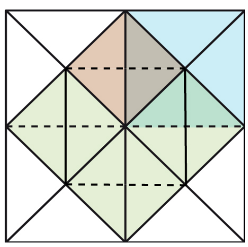
Une preuve combinatoire en admettant une assertion de travail.

On considère que le petit triangle est l'unité de base. Dans ce cas, les pièces ont pour aire :



1 2 2 2 4

Assertion de travail (démontrée en page 5) :
Les seuls carrés constructibles avec les pièces du Tangram sont d'aire 2, 4, 8 ou 16.
De plus, pour former ces quatre carrés, les pièces du Tangram se disposent exactement sur la grille ci-dessous.



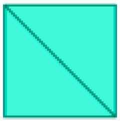
Cette grille est le pavage à l'aide du triangle unité du carré que l'on obtient avec toutes les pièces du Tangram ; les seuls carrés que l'on peut y trouver comportent 2 (carré rouge), 4 (carré bleu), 8 (carré vert) ou 16 pièces (carré entier).

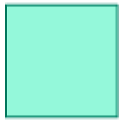
Cette observation n'est en aucun cas une preuve ; elle nécessite une démonstration complète que nous présenterons plus loin.

A l'aide de cette assertion, on montre ci-dessous que les seuls carrés que l'on peut construire sont bien ceux décrits plus haut

La question qu'il faut se poser est la suivante :
Comment peut-on écrire les nombres 2, 4, 8, et 16 (les aires des carrés possibles) à l'aide de l'addition et des nombres 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4 (les aires des pièces du Tangram) ?

<u>Carré d'aire 2 :</u>
2 peut s'écrire comme 1 + 1 ou 2

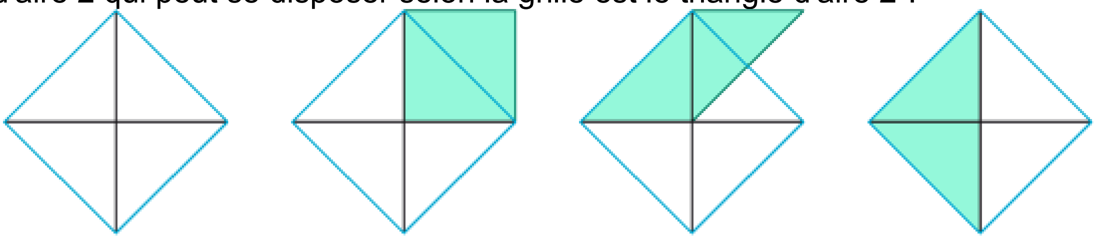
Pour 1+1, on obtient :  .

Pour 2, la seule pièce d'aire 2 qui est aussi un carré est 

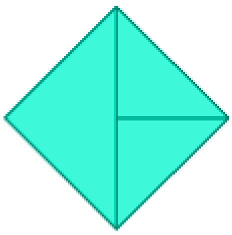
<u>Carré d'aire 4 :</u>
4 peut s'écrire : (1 + 1 + 2), (2 + 2) ou 4

Pour 4, la seule pièce d'aire 4, n'est pas un carré.
Pour 2 + 2, il n'est pas possible de combiner 2 pièces d'aire 2 pour construire un carré.

Pour 1 + 1 + 2, si on observe le carré d'aire 4 triangles unités, on constate que la seule pièce d'aire 2 qui peut se disposer selon la grille est le triangle d'aire 2 :

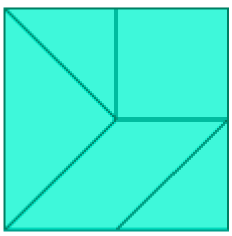


La seule possibilité est donc :

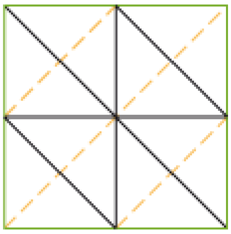


<u>Carré d'aire 8</u>
8 peut s'écrire comme : (1 + 1 + 2 + 2 + 2), (1 + 1 + 2 + 4), (4 + 4)

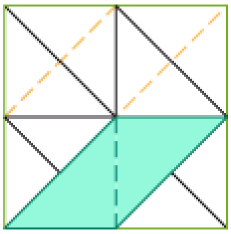
Pour 1 + 1 + 2 + 2 + 2, il s'agit d'utiliser toutes les pièces sauf les deux grands triangles.
On a un exemple :



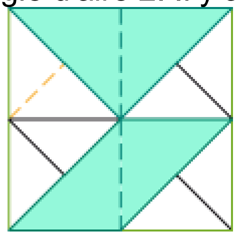
Mais est-ce le seul ?
Reprenons la grille pour un carré d'aire 8. Les triangles unités peuvent être disposés de deux manières : soit l’hypoténuse est placée selon une diagonale noire, soit elle est placée selon une diagonale orange.



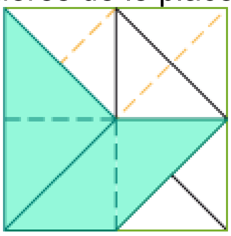
Commençons par placer le parallélogramme. A symétrie centrale près, le seul moyen de le placer sur la grille est :



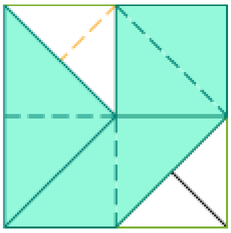
Plaçons ensuite le triangle d'aire 2. Il y a deux manières de le placer :



et

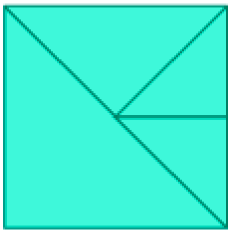


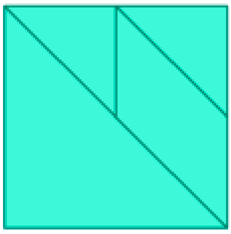
Cependant, dans la première configuration, il est impossible de disposer ensuite le carré. On choisit donc la deuxième configuration et le carré n'a ensuite qu'une unique possibilité de placement :

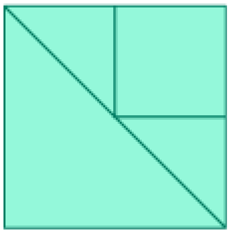


Les triangles d'aire 1 se placent enfin de manière unique pour former la configuration proposée.

Pour 1 + 1 + 2 + 4, les trois combinaisons avec chacune des pièces d'aire 2 sont possibles :

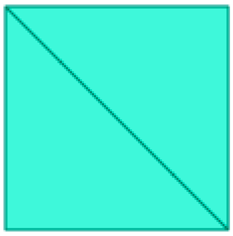






Elles sont uniques par le même type d'arguments que ci-dessus.

Pour 4 + 4, la seules possibilité est :

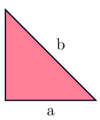
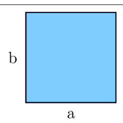
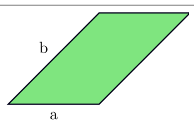


<u>Carré d'aire 16 :</u>
La seule possibilité d'obtenir 16 est de prendre toutes les pièces et donc de faire le carré maximal. De plus, par le même type d'arguments que ci-dessus, cette configuration des pièces constitue l'unique solution.

En admettant la première assertion, nous avons ainsi démontré qu'il existe exactement 9 carrés constructibles avec les pièces du Tangram.
Le problème est que cette démonstration ne peut être considérée comme complète que si l'on démontre l'assertion de travail.
Remarquons au passage qu'une conséquence de cette démonstration est qu'il n'existe pas de carré construit avec 6 pièces de Tangram. Comme cette question peut émerger avant même de parler d'une classification complète, nous vous proposons ici une démonstration de ce fait. De plus, cette démonstration utilise les mêmes outils que la preuve de l'assertion de travail et constitue de ce fait un bon exercice préparatoire.

Théorème 1
Avec six des sept pièces du Tangram, il est impossible de construire un carré.

Preuve.
Études tout d'abord les dimensions des pièces du Tangram
Choisissons l'aire du plus petit triangle comme égal à une unité d'aire (prise comme unité de longueur au carré). La longueur des petits côtés du petit triangle est donc égale à $\sqrt{2}$ (unité de longueur). L'hypoténuse de celui-ci vaut 2.
De proche en proche, on peut calculer les dimensions de chacune des pièces (voir le tableau ci-dessous) en remarquant que toutes les pièces peuvent être décomposées en réunion de petits triangles, (voir page 7).

Pièces		a	b	Aire
Petit triangle		$\sqrt{2}$	2	1
Triangle intermédiaire		2	$2\sqrt{2}$	2
Grand triangle		$2\sqrt{2}$	4	4
Carré		$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
parallélogramme		$\sqrt{2}$	2	2

Ceci permet aussi de déduire que l'aire du Tangram carré formé par les sept pièces vaut 16 et son côté vaut 4.

Si on enlève une pièce de Tangram, alors l'aire des pièces restantes peut valoir 12 (si on enlève une pièce d'aire 4), 14 ou 15. S'il est possible de construire un carré avec six pièces de Tangram, alors l'aire de ce carré vaut obligatoirement 12, 14 ou 15.
Son côté doit donc être égal soit à $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, soit à $\sqrt{14}$, soit à $\sqrt{15}$.

Montrons dans chacun de ces cas que ceci est impossible. Pour cela, énonçons un résultat de nature arithmétique.

Lemme 1.
Si n est un nombre entier strictement positif qui n'est pas un carré (il n'existe pas de nombre entier k tel que $k^2=n$) et s'il existe deux nombres rationnels a et b tels que $\sqrt{n}=a+b\sqrt{2}$, alors n est le produit d'un carré parfait avec une puissance de 2 (c'est-à-dire il existe deux entiers v et s tel que $v^2 2^s=n$).

Si on admet le lemme 1, la preuve du théorème se termine en remarquant que comme le bord d'un carré doit être formé d'une réunion disjointe de bords de pièces de Tangram, sa longueur est aussi égale à la somme des longueurs des côtés de pièces le recouvrant.
Comme la longueur de chaque côté est de la forme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b rationnels, leur somme est aussi de cette forme.
Or, la contraposée du lemme dit que si un entier n qui n'est pas un carré ne peut pas s'écrire comme $v^2 2^s$, alors $\sqrt{n}$ ne peut pas s'écrire comme $a+b\sqrt{2}$ avec a et b rationnels.
Comme ni 12, ni 14, ni 15 ne peuvent être écrits sous la forme $v^2 2^s$, alors ni $\sqrt{12}$, ni $\sqrt{14}$, ni $\sqrt{15}$ ne peuvent s'écrire comme $a+b\sqrt{2}$.
Il n'est donc pas possible de construire un carré avec 6 pièces de Tangram. □

Démonstration du Lemme 1.
Le fait que n ne soit pas un carré implique (en utilisant l'existence et l'unicité de la décomposition des nombres entiers en facteurs premiers) qu'il existe un nombre premier p et un entier impair $2t+1$ tels que p^{2t+1} divise n , mais p^{2t+2} ne divise pas n . En effet si n était un carré, alors tous ses facteurs premiers apparaîtraient à une puissance paire.
On a donc $\sqrt{n}=\sqrt{u\,p^{2t+1}}=a+b\sqrt{2}$
En élevant cette égalité au carré, on obtient
$u\,p^{2t+1}=(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$ (*)
Comme n est non nul a et b ne peuvent pas être nuls simultanément. On a donc trois cas à étudier :
(A) a et b sont non nuls,
(B) $a=0$ et $b\neq 0$,
(C) $a\neq 0$ et $b=0$.

(A) Comme a et b sont non nuls, on obtient $\sqrt{2}=\dfrac{u\,p^{2t+1}-a^2-b^2}{2ab}$. Ce qui implique que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est impossible.
(B) $a=0$ et $b\neq 0$ implique que (*) devient $u\,p^{2t+1}=2b^2$.
Deux cas sont possibles soit 2 divise p , soit 2 divise u .
Si 2 divise p , alors $p=2$, on a donc $u\,2^{2t+1}=2b^2$, ce qui implique que $u=(\frac{2^t}{b})^2$. Ceci implique que u est bien un carré.

Si 2 divise u , p est différent de 2 et on a $u\,p^{2t+1}=2b^2$, mais ceci est impossible, car p^{2t+1} divise b^2 , mais p^{2t+2} ne le divise pas. Or toutes les puissances maximales de nombres premiers divisant un carré sont paires.

(C) $a\neq 0$ et $b=0$, implique que $u\,p^{2t+1}=a^2$. Ce qui est impossible par le même raisonnement que précédemment.

La seule possibilité est donc bien : $v^2 2^s=n$. □

Cette preuve utilise fortement l'additivité de l'aire ainsi que des arguments arithmétiques. Elle n'est pas adaptée pour des petits degrés. Il faut donc utiliser la preuve combinatoire décrite plus haut.

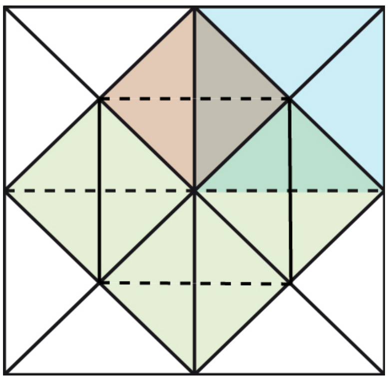
Il est important de remarquer que démontrer la non existence d'une décomposition est en général, plus difficile que d'en démontrer l'existence. Il faut en général, pour répondre à de telles questions basculer notre raisonnement d'un monde à un autre. Dans notre cas, on a traduit un problème géométrique en un problème arithmétique pour lequel on avait des outils plus efficaces. La plupart des grands résultats mathématiques récents sont de ce type, ils ont construit un pont entre deux mondes mathématiques différents, permettant dans chacun de ceux-ci d'utiliser les outils de l'autre.

Cette démarche révolutionnaire date du début du XIXème siècle et est due à un jeune mathématicien français Evariste Galois qui l'utilisa pour démontrer qu'il n'existe pas de formules donnant les solutions exactes d'une équation générale à coefficient rationnels de degré 5 ou plus. Son travail était tellement en avance sur son temps, qu'il fallut près d'un demi-siècle pour que cette démarche et les outils mis en oeuvre soient compris.

Puisque nous nous sommes donnés des outils arithmétiques, est-il possible, en les utilisant, de démontrer l'assertion proposée sans preuve dans la preuve combinatoire.

Assertion

Si un carré est obtenu comme décomposition de pièces de Tangram, alors les pièces de sa décomposition se positionnent sur la grille suivante.



Cette assertion implique, en particulier, que les seuls carrés possibles sont d'aire 2, 4, 8 ou 16.

Cette dernière remarque peut se déduire directement du résultat arithmétique, puisque les côtés d'un carré admettant une décomposition en pièces de Tangram ont une longueur égale à $a+b\sqrt{2}$. Il doivent donc être une puissance de 2.

Preuve de l'assertion.

Remarquons que les côtés des pièces de Tangram apparaissant dans une décomposition sont toujours parallèles soit à un des côtés du carré, soit aux diagonales.

En effet les angles apparaissant dans les pièces de Tangram sont 45° et 90°.
Partant des pièces formant la base du carré, tous les côtés des pièces touchant le bord satisfont notre condition de parallélisme. Les pièces de Tangram se collant bord à bord, de proche en proche (en mathématique en dit par induction finie), on voit que cette condition de parallélisme est valable pour tous les bords des pièces. Les côtés des pièces sont donc toujours parallèles aux traits du quadrillage.

Pour démontrer l'assertion, il ne reste donc qu'à s'assurer que les sommets des pièces de Tangram sont toujours sur les sommets du quadrillage.

Pour ce faire, il faut différencier deux situations.

(A) Si le carré dont on cherche la décomposition est d'aire 2 ou 8, son côté sera de longueur $\sqrt{2}$ ou $2\sqrt{2}$.
(B) Si le carré dont on cherche la décomposition est d'aire 4 ou 16, son côté sera de longueur 2 ou 4.

Comme les longueurs des côtés de pièces de Tangram sont soit entières, soit de la forme $k\sqrt{2}$ avec $k=1$ ou 2. Nous allons démontrer que sur le bord d'un carré de la situation (A) ne peuvent apparaître que des segments de longueurs de la forme $k\sqrt{2}$, alors que dans la situation (B) seuls des segments de longueurs entières peuvent apparaître.

Ceci force les pièces sur le bord à respecter le quadrillage, puisque les sommets sur le bord sont sur le quadrillage et les directions et les longueurs des autres côtés sont compatibles avec celui-ci.

Il suffit d'examiner les positions possibles de chaque pièce de Tangram.

Montrons donc les assertions (A) et (B), mais pour cela, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 2
Etant donnés a, b, c et d des nombres strictement positifs, alors
$$(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$$
ne peut pas être entier ou s'écrire comme $k\sqrt{2}$.

Démonstration du Lemme 2.
Supposons par l'absurde qu'il existe un entier m tel que $m=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$.
Comme b et d sont strictement positif $b+d$ aussi et on peut donc écrire $\frac{m-a-c}{b+d}=\sqrt{2}$, ce qui impliquerait que $\sqrt{2}$ est rationnel, ce qui est absurde.

Supposons maintenant que $k\sqrt{2}=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}$
Comme a,b,c,d et $\sqrt{2}$ sont positifs, alors k l'est aussi et donc la seule manière permettant à cette égalité d'être vraie est $(k-b-d)\sqrt{2}=a+c$. Ce qui force $k-b-d=0$ (par irrationalité de $\sqrt{2}$) et donc $a+c=0$ ce qui n'est pas possible puisque a et c sont strictement positifs.

Ainsi en additionnant $b\sqrt{2}$ avec un entier a , on obtient nécessairement $a+b\sqrt{2}$ qui ne peut s'écrire comme un entier ou comme $k\sqrt{2}$. □

Preuve de (A) : si l'aire du carré considéré est 2 ou 8, comme les côtés sont de ces deux carrés sont de la forme $k\sqrt{2}$ et que de plus ils sont somme des longueurs des côtés des pièces de Tangram qui forment le côtés. Ces pièces ayant soit une longueur entière, soit une longueur de la forme $k\sqrt{2}$, par ce qui précède, seules des pièces du second type peuvent apparaître sur le bord.

La preuve de (B) est identique à celle de (A).

On a donc démontré que les sommets des pièces de Tangram d'une décomposition de carrés sont tous sur le quadrillage proposé et que les côtés des pièces sont tous parallèles aux lignes du quadrillage. Ceci prouve bien que les pièces du Tangram d'une décomposition se positionne sur le quadrillage suivant. □

Une dernière remarque : Quand on cherche à prouver l'irrationalité de $\sqrt{2}$ en classe, il est fréquent de la part des élèves de demander l'utilité d'un résultat.
On répond souvent par des remarques sur les décimales de $\sqrt{2}$, en particulier la non périodicité du développement décimal, mais cela ne justifie que partiellement l'utilité. L'incommensurabilité de certains segments peut être invoquées aussi.

Mais une telle preuve répondant à une question très naturelle « Avons-nous toutes les décompositions de carrés en pièces de Tangram ? » montre l'utilité en pratique de tels outils.