

A partir d'une boîte rectangulaire construite par pliage

Résumé	Construire par pliage une boîte rectangulaire puis se poser des questions en lien avec sa contenance, sa hauteur, la forme et l'aire de son fond, son volume, ... et tenter d'y répondre.
Degrés concernés	2P - 4P
Contenus et compétences mathématiques	<ul style="list-style-type: none"> - estimation de grandeurs - organisation d'un mesurage de différentes grandeurs (longueur, surface, volume) - comparaison de mesures
Matériel	<p>Par élève :</p> <p>Marche à suivre (version de base en annexe) pour la réalisation du pliage 1-2 feuilles de papier origami bicolore (pour apprendre à réaliser le pliage) 2-3 feuilles de papier A4 cartonné 120 g (pour faire des comparaisons de contenance) Feuilles de papier A4 de récupération (pour faire de nombreux essais) Règle millimétrée</p> <p>Par classe :</p> <p>Matière pour remplir les boîtes :</p> <ul style="list-style-type: none"> - sable - jetons - petits cailloux - graines de différentes dimensions : marrons, haricots secs, lentilles, riz (les aliments peuvent être récupérés pour être consommés après l'activité)
Durée	4 périodes ou davantage

Proposition de déroulement

L'activité commence par l'apprentissage de la construction de la boîte, soit par guidage de l'enseignant-e étape par étape soit à l'aide de la marche à suivre, les élèves réalisant leur pliage soit individuellement soit par groupes de deux ou trois.

Pour bien connaître la construction, il est nécessaire de réaliser la boîte à plusieurs reprises, avec ou sans marche suivre ou avec d'autres types de papier.

Lors de cet apprentissage, l'enseignant-e a l'occasion de mettre en évidence les différentes formes géométriques rencontrées (rectangle, triangle, carré, parallélogramme rectangle, ...). Si l'objectif de l'activité n'est pas prioritairement la reconnaissance de ces formes, il-elle s'efforcera cependant d'utiliser le vocabulaire géométrique adéquat.

On peut construire des boîtes de différentes tailles :

- soit en utilisant au départ des feuilles de dimensions différentes
- soit en faisant varier la distance entre le premier pli et le deuxième pli dans l'étape 2. de la [marche à suivre](#).

Dans cette activité, nous proposons de toujours partir d'une feuille de papier format A4 (21×29,7 cm) et de ne jouer que sur la distance entre les deux premiers plis du pliage.

Avec une feuille A4, cette distance peut être de 7,45 cm ([version de base](#)), supérieure à 7,425 cm ([variante a](#)), comprise entre 4,95 et 7,425 cm ([variante b](#)) ou comprise entre 2,97 et 4,95 cm ([variante c](#)). Ces quatre versions de la marche à suivre se trouvent en annexe.

Une fois que les élèves se sont appropriés la version de base de la construction du pliage, l'enseignant-e montre qu'il est possible de faire le deuxième pli où l'on veut, en-deçà ou au-delà de la moitié (cf. étape 2. des [marches à suivre](#)), mais toujours parallèle au premier pli.

L'activité n'a de sens que si les boîtes sont différentes, c'est-à-dire si **les élèves choisissent arbitrairement la distance entre les deux premiers plis.**

L'utilisation de papier cartonné 120 g rend le pliage plus difficile et moins précis mais permet ensuite de remplir les boîtes sans trop de déformation. Le choix du papier se révèle crucial en particulier lorsque les élèves comparent les contenances en procédant par remplissages successifs.

Une fois construites, les boîtes des élèves sont exposées et observées. La mise en évidence des ressemblances et des différences entre ces boîtes fait l'objet d'une discussion. Outre les différences liées aux couleurs ou à la qualité de la facture, les élèves sont amenés à faire des observations concernant la forme ou les dimensions des boîtes.

L'enseignant-e retient les observations et les questions intéressantes. Si elle n'apparaissent pas spontanément, il-elle dirige la discussion de manière à faire ressortir des questions mathématiques dont il sait que la réponse est à la portée de ses élèves ; l'enseignant-e peut également proposer des questions complémentaires. (Voir rubrique « Liste de

	<p>questions susceptibles d'être posées » ci-dessous). A la fin de cette discussion, les observations et les questions sont reformulées et notées.</p> <p>En fonction du degré, l'enseignant ou les élèves choisissent une question qui sera le point de départ de la recherche. Les élèves travaillent par groupes et notent leurs résultats au fur et à mesure dans leur cahier.</p> <p>Des mises en commun intermédiaires permettent de faire le point sur l'état d'avancement des travaux des élèves et de noter les questions ou les problèmes qui surgissent.</p> <p>A l'issue de ces travaux, une mise en commun permet aux différents groupes de présenter, d'expliquer et de comparer leurs solutions et leurs démarches.</p> <p>L'enseignant-e fait ensuite avec ses élèves une synthèse des observations, des constats, des procédures, des résultats obtenus et des outils mathématiques utilisés. C'est également l'occasion pour l'enseignant-e de souligner ce qui doit être retenu de l'activité, d'institutionnaliser certains savoirs mathématiques et de faire des liens avec d'autres activités.</p> <p>Suite à cette mise en commun, de nouvelles questions peuvent se poser, ce qui constitue un prolongement potentiel à cette activité.</p>
<p>Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)</p>	<p>Le pliage de la boîte rectangulaire est un bon prétexte pour que les élèves se posent des questions et entament une véritable recherche mathématique.</p> <p>En 2P, 3P, 4P les procédures de résolution sont essentiellement expérimentales. Les constats et les conjectures faits par les élèves doivent être relevés et discutés puis vérifiés expérimentalement. Charge à l'enseignant-e de mettre en doute des certitudes, de proposer des contre-exemples pour relancer le débat.</p> <p>Des outils de mesures comme la règle graduée ou une balance peuvent être petit à petit introduits afin de permettre aux élèves de passer de la comparaison directe ou indirecte de grandeurs à une comparaison de mesures.</p> <p>Démarches et relances possibles : voir les rubriques « Liste de questions susceptibles d'être posées » et « Éléments pour la synthèse » ci-dessous.</p>
<p>Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Estimation de grandeurs - Organisation d'un mesurage - Comparaison de mesures <p>Moyens d'enseignement 2P-4P : module 7 (des problèmes pour mesurer)</p>

Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Mesurage Mesures Système d'unités Nombres entiers et décimaux Comparaison de nombres Volume d'un parallélépipède rectangle
Développements possibles	Voir rubrique « Liste de questions susceptibles d'être posées » ci-dessous

Énoncé de l'élève

La lecture de la marche à suivre d'un pliage est un exercice difficile pour qui n'y est pas habitué. L'apprentissage de la construction de la boîte ne passe donc pas nécessairement par la compréhension d'une consigne écrite.

L'enseignant-e peut montrer les différentes étapes de la construction, étapes que les élèves s'efforceront de copier et de retenir. Cet enseignement « par l'exemple » permet de gagner du temps et se justifie ici d'autant plus que les enjeux principaux de l'activité ne se situent pas dans l'apprentissage du pliage lui-même.

Pour les plus grands degrés, l'enseignant-e peut proposer une marche à suivre écrite ([version de base](#) en annexe). Il-elle observe ses élèves se débrouiller mais les accompagne aussi dans leurs réalisations en pointant rapidement les étapes de la marche à suivre mal interprétées, en exigeant une certaine précision, ou en proposant de recommencer avec une nouvelle feuille...

Les quatre versions de la marche à suivre sont essentiellement à l'usage des enseignant-e-s. La procédure est toujours la même. Seule l'étape 2. est fondamentalement différente. La distance variable entre les deux premiers plis joue un jeu primordial dans cette activité. Il est important que l'enseignant en soit conscient et parvienne à faire en sorte que les élèves choisissent finalement cette distance de manière arbitraire.

Liste de questions susceptibles d'être posées

Toutes les boîtes ont été réalisées à partir d'une même feuille de papier A4. Cependant, toutes les boîtes ne sont pas toutes les mêmes ; elles n'ont pas toutes la même forme, certaines sont plus hautes mais moins larges ou moins longues, d'autres sont plus basses mais plus larges ou plus longues.

A partir de ces observations, de nombreuses questions peuvent être posées. La liste ci-dessous n'est évidemment pas exhaustive.

Question 1.

- Qu'est-ce qui fait que toutes les boîtes ne sont pas identiques ?

Question 2.

- Comment classer les boîtes réalisées de la plus petite à la plus grande ?
- ou
- Quelle est la plus grande/petite boîte ?

Question 3.

- Les boîtes sont-elles emboîtables ?
- ou
- Peut-on toujours mettre une boîte dans une boîte moins haute ?
- ou
- Plus une boîte est haute moins elle est longue **et** moins elle est large ?

Question 4.

- Pour faire un couvercle qui s'emboîte bien sur votre boîte en utilisant la même marche à suivre que devez-vous changer ?
- ou
- Comment fabriquer cinq boîtes qui s'emboîtent les unes dans les autres en utilisant le même pliage ?

Question 5.

- A partir de la même feuille, peut-on construire une boîte avec un fond carré ?
- ou
- Comment faire une boîte avec un fond carré à partir d'une feuille A4 ?

Question 6.

- Peut-on construire une boîte cubique ?
- ou
- Comment faire une boîte en forme de cube ?

Question 7.

- Toutes les boîtes ont-elles la même contenance ?
- ou
- Toutes les boîtes peuvent-elles contenir la même quantité de matière ?

Question 8.

- Si l'on classe les boîtes réalisées de la plus petite à la plus grande, en fonction de leur longueur, largeur, hauteur, en fonction de l'aire de leur fond, en fonction de leur volume, obtient-on toujours le même classement ?

Question 9.

- Si, après avoir réalisé la boîte, on la re-déplie, quelles sont les parties de la feuille qui forment le fond de la boîte, les côtés extérieurs ou intérieurs, quels plis forment le bord supérieur de la boîte ?

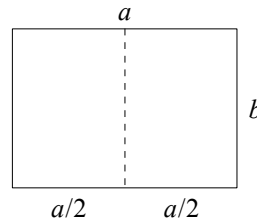
Remarque

Une feuille de format A4 a une longueur de 29,7 cm et une largeur de 21 cm. Ces dimensions n'ont pas été fixées par hasard.

Elles résultent de l'application de trois principes :

- 1) lorsqu'on plie une feuille A4 en deux, le format reste identique : le rapport longueur sur largeur de la feuille reste constant.
- 2) une feuille A4 est la moitié d'une feuille A3 qui est la moitié d'une feuille A2, elle-même étant la moitié d'une feuille A1 qui est la moitié d'une feuille A0.
- 3) la surface d'une feuille A0 mesure 1 m².

D'après 1), si a et b sont respectivement la longueur et la largeur d'une feuille A4, le rapport $\frac{a}{b}$ est égal au rapport $\frac{b}{a/2}$ d'où $a = b\sqrt{2}$.



D'autre part, d'après 2), la feuille A4 est la moitié de la moitié de la moitié de la moitié d'une feuille A0 ; la feuille A4 représente donc le seizième d'une feuille A0. Sa surface a donc une aire de $\frac{1}{16}$ de m².

Par conséquent, si $a = b\sqrt{2}$ et $a \cdot b = \frac{1}{16}$, $a = \frac{\sqrt[4]{2}}{4}$ et $b = \frac{1}{4\sqrt[4]{2}}$, (a et b étant des longueurs exprimées en mètres).

Les dimensions d'une feuille A4 sont les valeurs arrondies de $a = 0,297301779...$ et de $b = 0,210224104...$ m.

Éléments pour la synthèse

Question 1.

- *Qu'est-ce qui fait que toutes les boites ne sont pas identiques ?*

Si on ne s'en tient qu'aux différences de mesures, c'est bien-sûr la distance variable entre les deux premiers plis qui crée ces différences. Pour les élèves qui n'en sont pas convaincu, il est nécessaire qu'ils l'expérimentent en faisant plusieurs essais.

La question qui se posent ensuite est de savoir où faire le deuxième pli pour avoir une boite plus haute, plus large, plus longue, ...

La réponse à cette question subsidiaire est que plus la distance entre les deux premiers plis est grande, plus la boite est large et longue mais moins elle est haute. Réciproquement, plus la distance entre les deux premiers plis est petite, plus la boite est haute mais moins elle sera longue et large.

Question 2.

- *Comment classer les boites réalisées de la plus petite à la plus grande ?*

ou - *Quelle est la plus grande/petite boite ?*

C'est au travers d'une discussion entre élèves que devrait apparaitre les différentes grandeurs en jeu. Ce n'est pas pareil de classer les boites en fonction de la hauteur, de la largeur ou de la longueur, de les classer relativement à la surface du fond ou de les classer par rapport à leur contenance.

La comparaison de longueurs peut être faite mettant les objets côte à côte ou en utilisant une règle graduée et en comparant les mesures obtenues.

La comparaison de surfaces du fond peut être faite en superposant les surfaces à comparer. Par exemple, pour comparer la surface des fonds de deux boites, on peut emboiter les boites l'une dans l'autre ou les mettre fond contre fond et observer celui qui dépasse.

La comparaison de la contenances des boites n'est pas aussi direct. (Voir question 7.)

L'utilisation du terme « hauteur » ne pose pas de problème. Il n'en va pas de même de « largeur » et « longueur ». La largeur désigne la mesure du plus petit côté d'un rectangle par opposition à la longueur qui désigne la mesure du grand côté. (Par abus, on désigne par largeur et longueur les côtés eux-mêmes.) Dans cette activité, la mesure du côté perpendiculaire au pli qui forme l'axe de symétrie du fond de la boite, est tantôt la longueur, tantôt la largeur de la boite. (Voir question 5.)

Si l'on classe les boites en fonction de la longueur, de la largeur ou de la surface du fond, on obtient toujours le même classement. Il est exactement l'inverse du classement en fonction de la hauteur des boites. En revanche le classement en fonction de la contenance est différent. (Voir question 7.)

Question 3.

- *Les boites sont-elles emboitables ?*

ou - *Peut-on toujours mettre une boite dans une boite moins haute ?*

ou - *Plus une boite est haute moins elle est longue et moins elle est large ?*

C'est à nouveau les boites réalisées ou de nouvelles expérimentations qui vont permettre aux élèves d'avoir des éléments de réponse. Le résultat ne peut donc pas être absolu.

Compte tenu de l'épaisseur du papier et des imprécisions liées au pliage même n'est pas possible de mettre l'une dans l'autre des boîtes dont les mesures sont trop semblables. La question de la longueur et de la largeur peut là aussi émerger. (Voir question 2.)

En revanche, il est possible d'observer que plus une boîte est haute, moins elle est large et moins elle est longue. Pour cela, les élèves peuvent procéder par comparaison directe de longueurs ou recourir à la règle graduée puis comparer les mesures.

Question 4.

- *Pour faire un couvercle qui s'emboîte bien sur votre boîte en utilisant la même marche à suivre que devez-vous changer ?*
- ou - *Comment fabriquer cinq boîtes qui s'emboîtent les unes dans les autres en utilisant le même pliage ?*

On part toujours de la même feuille de papier. C'est la distance entre les deux premiers plis de la marche à suivre qui détermine les dimensions de la boîte.

Les élèves peuvent observer que plus la distance entre les deux premiers plis est grande, plus la boîte est large et longue mais moins elle est haute. Réciproquement, plus la distance entre les deux premiers plis est petite, plus la boîte est haute mais moins elle sera longue et large.

Pour réaliser des boîtes emboîtables il faut donc réaliser des pliages en augmentant ou diminuant cette distance.

Si l'on veut faire un couvercle sur une boîte déjà construite, sans s'en remettre uniquement au hasard, il faut faire une seconde boîte avec une longueur et une largeur supérieure à la première, ce que l'on obtient en augmentant la distance entre les deux premiers plis par rapport au premier pliage. Mais quelle est cette distance ? Il faut donc la mesurer et garder une trace de cette mesure lors du premier pliage. On peut également observer que le pli qui coupe le fond d'une boîte est le premier pli de la marche à suivre et que le second pli forme les bords du fond de la boîte qui lui sont parallèles. Pour faire ce couvercle il suffit donc de faire un pliage dont la distance entre les deux premiers est légèrement supérieure à la moitié du fond de la première boîte. C'est l'expérimentation qui indiquera de combien.

Question 5.

- *A partir de la même feuille, peut-on construire une boîte avec un fond carré ?*
- ou - *Comment faire une boîte avec un fond carré à partir d'une feuille A4 ?*

Il est possible de construire une boîte à fond carré. Pour les élèves il s'agit d'abord d'observer et de comparer la forme des fonds des boîtes déjà construites. Il s'agit toujours de rectangles mais qui sont plus ou moins allongés. Pour qu'il y ait un carré, il faut que la longueur et la largeur soient égales. Avec une feuille A4, c'est le cas si la distance entre les deux premiers plis est de 6,15 cm.

Question 6.

- *Peut-on construire une boîte cubique ?*
- ou - *Comment faire une boîte en forme de cube ?*

A expérimenter. Avec une feuille de format A4, la réponse est non : il n'y a qu'une boîte dont le fond est carré (voir question 5.) et pour cette boîte, la hauteur n'est pas égale à la longueur des côtés.

Question 7.

- *Toutes les boîtes ont-elles la même contenance ?*
- ou - *Toutes les boîtes peuvent-elles contenir la même quantité de matière ?*

Dans cette activité, il est facile de comparer des longueurs de côtés ; il est également possible de comparer la surface des fonds de boîtes. (Voir question 2.)

En ce qui concerne la contenance, il n'est pas possible de faire de comparaison directe par juxtaposition ou superposition.

La différence de contenance des boîtes est suffisamment faible pour que la simple perception, l'estimation globale ne permettent pas de déterminer la plus petite ou la plus grande des boîtes.

La procédure de comparaison que peuvent utiliser les élèves est celle de remplir successivement les différentes boîtes puis de comparer les quantités de matière utilisée.

Cependant pour mettre en évidence des différences, il est recommandé de se limiter à la comparaison de trois boîtes dont la différence de contenance est suffisamment grande ; par exemple, trois boîtes dont la distance entre les deux premiers plis est respectivement de 9, de 5 et de 11 cm. (*Dans ces cas-là, les volumes intérieurs des boîtes sont respectivement de 798, de 549 et de 726 cm³ environ.*)

Lors du remplissage, il faut être attentif à ce que le dessus de la matière utilisée soit horizontal, à la hauteur des bords supérieurs de la boîte.

La précision de la mesure dépend évidemment de la granularité de la matière utilisée. Il sera beaucoup plus facile de remplir complètement la boîte et de « lisser » le dessus si l'on utilise du sable fin que des gros cailloux.

Pour comparer les quantités de matière, il est possible d'utiliser la même matière pour remplir successivement les boîtes et de considérer là où il en manque et là où il y en a en trop. Il est également possible de remplir simultanément les boîtes puis de peser les boîtes remplies.

Question 8.

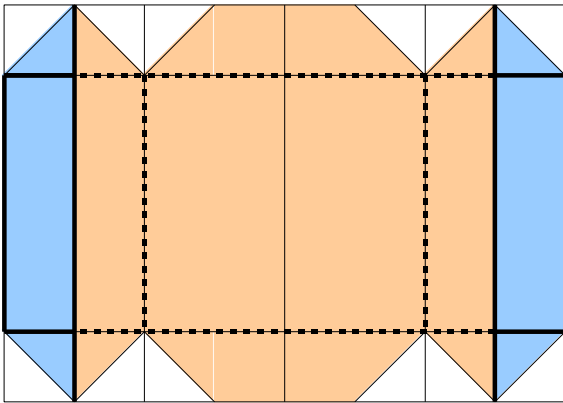
- *Si l'on classe les boîtes réalisées de la plus petite à la plus grande, en fonction de leur longueur, largeur, hauteur, en fonction de l'aire de leur fond, en fonction de leur volume, obtient-on toujours le même classement ?*

Voir question 2 et 7.

Question 9.

- *Si, après avoir réalisé la boîte, on la re-déplie, quelles sont les parties de la feuille qui forment le fond de la boîte, les côtés extérieurs ou intérieurs, quels plis forment le bord supérieur de la boîte ?*

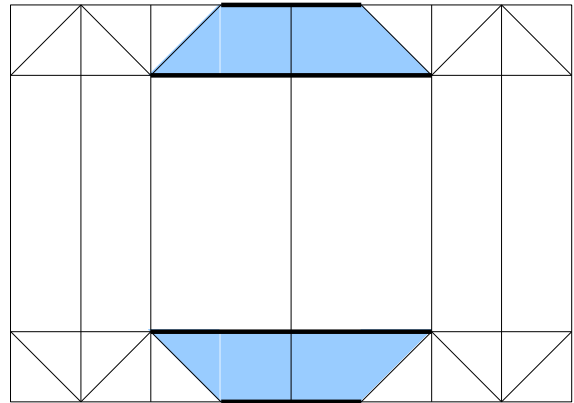
Encore une fois c'est l'expérimentation qui apporte la réponse. Dans les degrés concernés, on n'attend pas des élèves qu'ils répondent par pure réflexion mais qu'ils fassent des essais. Il peut cependant être intéressant d'anticiper lors d'un nouveau pliage en incitant les élèves à décorer le bord extérieur de la boîte avant la construction.



Recto

Côtés extérieurs
 Intérieur de la boîte

Arêtes intérieures
 Arêtes extérieures



Verso