Triangles

Résumé	Construire par pliage les hauteurs, bissectrices, médianes et médiatrices de différents triangles, observer leurs propriétés
Degrés concernés	5P[1]-8CO
Énoncé destiné aux élèves	Voir la fiche ci-dessous
Matériel	Pour chaque groupe : 4 triangles isocèles identiques (voir annexe), ciseaux, papier et instruments de géométrie
Durée	1 à 2 périodes
Propositions de déroulement	Les élèves travaillent en groupes de quatre et s'organisent pour se partager le travail. Ils écrivent ensemble leurs constats en vue de la mise en commun. Une mise en commun intermédiaire après 10 minutes de travail permet de confronter les compréhensions des 4 consignes de pliage et de mettre en évidence les procédures de pliage efficaces. Ultérieurement, une mise en commun intermédiaire peut être nécessaire pour dresser la liste des autres triangles connus. En fin d'activité, un débat porte sur les constats relevés par les élèves. Selon le degré, certains constats peuvent faire l'objet d'une démonstration (voir ci-dessous, éléments pour la synthèse).

1 L'étude des notions en jeu dans cette recherche ne figure pas les plans d'études de 5P et 6P. Ces notions peuvent toutefois être abordées de façon expérimentale, sans que l'enseignant insiste sur leur formalisation.

Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Identification et dessin des différents triangles : selon le degré, l'enseignant peut • laisser cette tâche entièrement à la charge des élèves • laisser les élèves dessiner après avoir listé les différents triangles • fournir aux élèves les différents triangles en 4 exemplaires L'accès à une photocopieuse facilite la reproduction en 4 exemplaires des triangles produits par les élèves. Si les plis sont effectués avec précision, l'apparition des points de concours ne devrait pas poser de difficulté. Pour les triangles obtusangles, le point de concours des hauteurs et celui des médiatrices se trouvent en dehors du triangle. Les élèves devront donc effectuer les plis sans découper le triangle.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Triangle isocèle, équilatéral, rectangle, scalène Hauteur, bissectrice, médiane, médiatrice Orthocentre, centre de gravité Cercle inscrit ou circonscrit

Triangles – Énoncé de l'élève

Découpez les quatre triangles isocèles.

Effectuez les plis suivants, en prenant un nouveau triangle pour chaque sorte de pli :

- Pliez de façon à partager chaque angle en deux parties égales
- Faites les plis coupant les côtés en leur milieu et à angle droit
- Faites les plis qui vont d'un sommet au centre du côté opposé
- Faites les plis coupant un côté à angle droit et passant par le sommet opposé

Dessinez d'autres triangles, chaque fois en 4 exemplaires identiques, et faites les mêmes plis.

Écrivez vos constats.

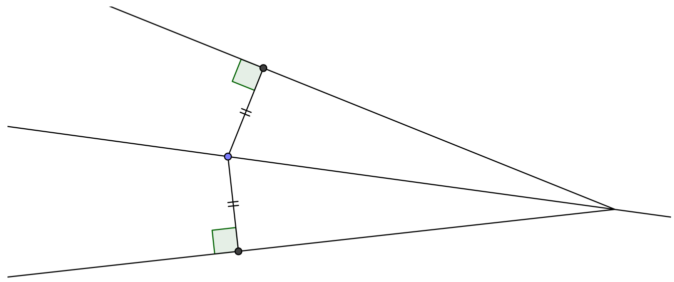
Éléments pour la synthèse

A l'issue de leur recherche, les élèves devraient avoir constaté que, quel que soit le triangle, les 3 bissectrices semblent se couper en un même point, et qu'il en va de même pour les médiatrices, les médianes et les hauteurs[2].
De plus, selon le triangle, certaines de ces droites se confondent, et elles peuvent se couper en un point singulier.

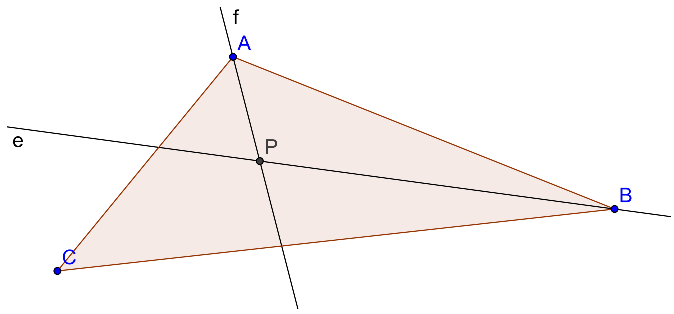
Bissectrices

Plier « de façon à partager chaque angle en deux parties égales » revient à marquer les bissectrices des 3 angles du triangle. Les 3 plis *semblent* se couper en un même point, quelque soit le triangle. Encore faut-il le démontrer pour en être certain.

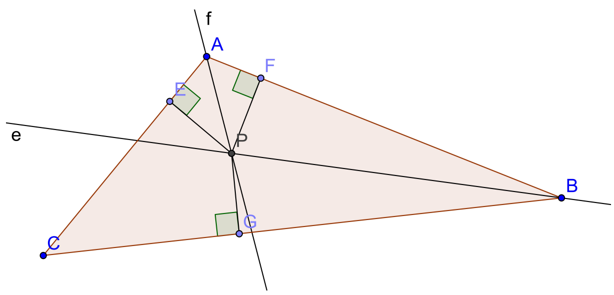
Chaque pli marque la bissectrice d'un angle. Chaque point d'une bissectrice se trouve à égale distance des 2 côtés (propriété de la bissectrice).



Considérons un triangle quelconque et 2 bissectrices. Elles se coupent en un point P.

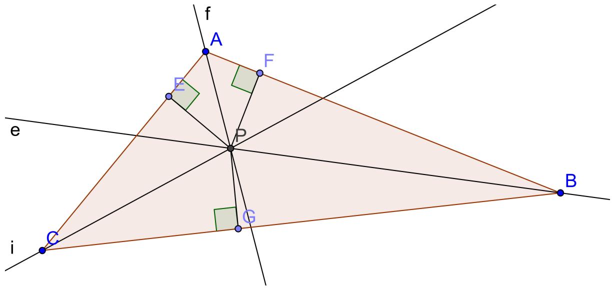


Ce point P se trouvant sur la bissectrice e, il est à égale distance des côtés AB et BC, donc $\overline{PF} = \overline{PG}$. Comme il est également sur la bissectrice f, il est à égale distance des côtés AB et AC, donc $\overline{PF} = \overline{PE}$.

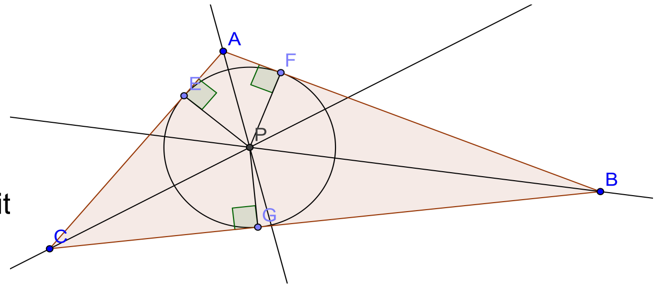


2 Seules les démonstrations pour les bissectrices et les médiatrices, abordables dans les degrés concernés par cette activité, sont développées ici.

On en conclut que $\overline{PG} = \overline{PE}$. Le point P se trouve à égale distance des côtés AC et BC, donc sur la bissectrice de l'angle en C.
Conclusion : les 3 bissectrices du triangle sont donc bien concourantes.



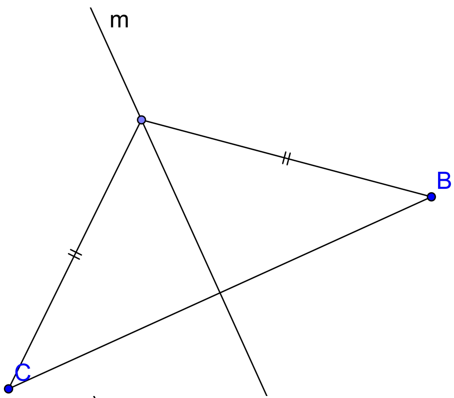
Puisque $\overline{PE} = \overline{PF} = \overline{PG}$, il existe un cercle de centre P passant par les points E, F et G.
Puisque les droites PE, PF et PG sont perpendiculaires aux côtés AC, AB et BC respectivement (par définition de la distance), le cercle est tangent aux 3 côtés du triangle. Il s'agit donc du cercle inscrit au triangle.



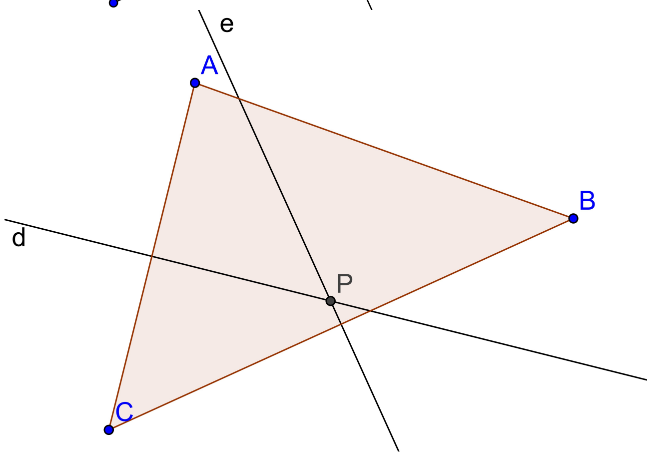
Médiatrices

Faire « les plis coupant les côtés en leur milieu et à angle droit » revient à marquer les médiatrices des 3 segments formant les côtés du triangle. Les 3 plis *semblent* se couper en un même point, quelque soit le triangle. Encore faut-il le démontrer pour en être certain.

Chaque pli marque la médiatrice d'un segment. Chaque point d'une médiatrice se trouve à égale distance des extrémités du segment (propriété de la médiatrice)[3].

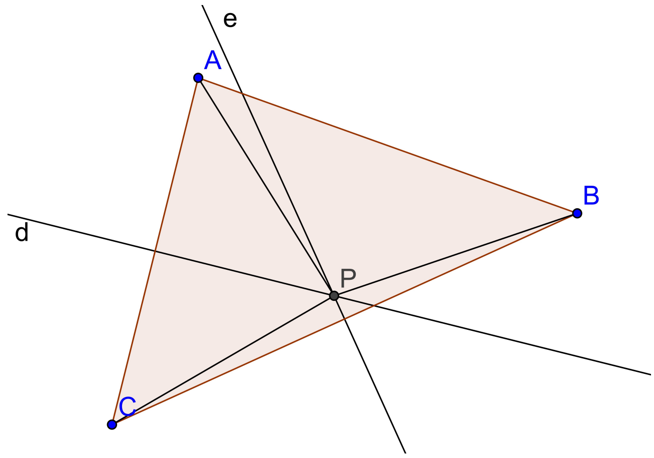


Considérons un triangle quelconque et 2 médiatrices. Elles se coupent en un point P.

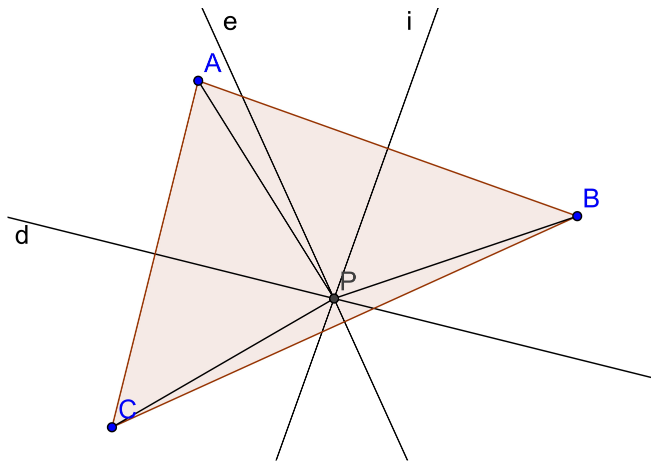


3 Contrairement à la bissectrice, on parle ici de distance point-point, on n'a donc plus d'angle droit.

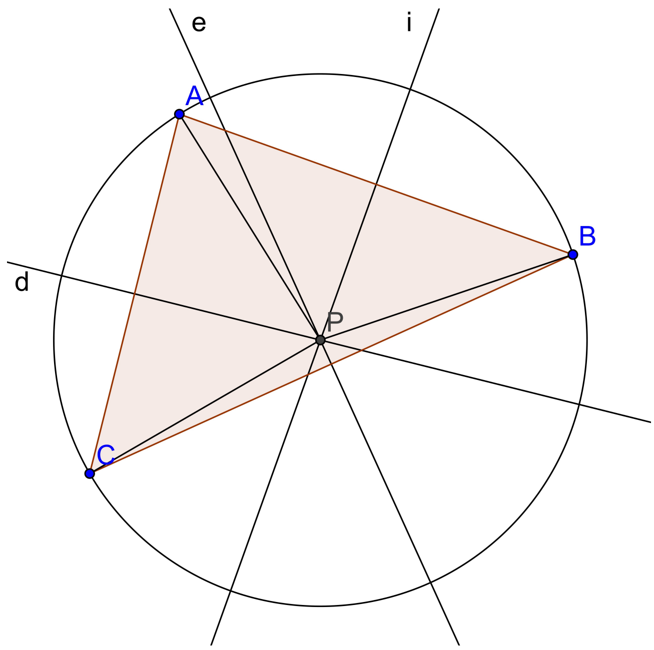
Ce point P se trouvant sur la médiatrice e, il est à égale distance des sommets B et C, donc $\overline{PB} = \overline{PC}$.
Comme il est également sur la médiatrice d, il est à égale distance des sommets A et C, donc $\overline{PA} = \overline{PC}$.



On en conclut que $\overline{PA} = \overline{PB}$. Le point P se trouve à égale distance des sommets A et B, donc sur la médiatrice i du côté AB.
Conclusion : les 3 médiatrices du triangle sont donc bien concourantes.



Puisque $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$, on en déduit par ailleurs que P est le centre du cercle circonscrit au triangle.



Les particularités des différents triangles en ce qui concerne les 4 plis effectués peuvent se résumer dans le tableau suivant :

<table>
<tr><th></th><th>hauteurs</th><th>bissectrices</th><th>médianes</th><th>médiatrices</th></tr>
<tr><td>triangle équilatéral</td><td colspan="4">Superposées</td></tr>
<tr><td>triangle rectangle</td><td>2 hauteurs sont confondues avec des côtés.
Orthocentre sur un sommet</td><td></td><td></td><td>Concourantes en un point situé au centre de l'hypoténuse</td></tr>
<tr><td rowspan="2">triangle isocèle</td><td colspan="4">Superposées pour un côté et son sommet opposé</td></tr>
<tr><td>Angle plus grand que 90° : concourantes en un point situé hors du triangle</td><td></td><td></td><td>Angle plus grand que 90° : concourantes en un point situé hors du triangle</td></tr>
<tr><td rowspan="2">triangle
isocèle rectangle</td><td colspan="4">Superposées pour un côté et son sommet opposé</td></tr>
<tr><td>2 hauteurs sont confondues avec des côtés.
1 hauteur produit 2 triangles semblables au 1er triangle.
Orthocentre sur un sommet</td><td></td><td></td><td>Concourantes en un point situé au milieu de l'hypoténuse</td></tr>
<tr><td>triangle
scalène acutangle</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>triangle
scalène obtusangle</td><td>Concourantes en un point situé hors du triangle</td><td></td><td></td><td>Concourantes en un point situé hors du triangle</td></tr>
</table>

Annexes