SEMAINE DE L'ARITHMÉTIQUE
proposition d'activité

Titre de l'activité	Quatre définitions, un seul nombre.
Résumé de l'activité	Le nombre d'or vu sous quatre angles différents, ce qui permet de mieux comprendre pourquoi il occupe une place si importante dans le cœur des hommes.
Type d'activité	Mise en équation. Résolution.
Degrés concernés	Tout degré dès que les élèves connaissent $(a + b)^2$
Énoncé destiné aux élèves	a) Quelle longueur faut-il ajouter à un segment de longueur 1, pour que le rapport de la longueur totale sur la longueur ajoutée soit égal au rapport de la longueur ajoutée sur la longueur initiale ? b) Comment partager un segment en deux parties de telle manière que le rapport de la grande partie sur la petite partie soit égal au rapport du tout sur la grande partie ? Déterminer ce rapport. c) Déterminer le côté du carré dont la valeur de l'aire augmente la valeur du côté de un. d) Déterminer le nombre positif dont l'inverse le diminue de 1.
Matériel	Une feuille contenant l'énoncé.
Durée	Environ 30-45 minutes.
Propositions de déroulement	Pour les élèves ne connaissant pas la formule du 2e degré, il faut, au préalable, les entraîner à compléter des carrés pour résoudre une équation du 2e degré. Travail en groupe de 2 à 4 personnes. Il est possible, peut-être même souhaitable suivant votre classe, de ne donner qu'une des activités à chaque groupe et que ce soit pendant la mise en commun que les élèves découvrent que cela donne à chaque fois le même nombre.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Mise en équation. Résolution d'équation.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Il est important de faire réaliser aux élèves, que c'est le fait que ces définitions très simples et qui ont l'air d'être indépendantes donnent toutes le nombre d'or, qui confère à Φ un statut "magique". Depuis les Grecs, très soucieux d'esthétique, qui ont découvert le nombre d'or et ces propriétés, les grandeurs dont le rapport donne ce nombre appelé aussi : "le rapport doré" ou "la divine proportion", sont considérées comme les plus harmonieuses et les plus belles.
Liens interdisciplinaires	Présence du nombre d'or dans l'art depuis les Grecs.

Quatre définitions, un seul nombre.

a) Quelle longueur faut-il ajouter à un segment de longueur 1, pour que le rapport de la longueur totale sur la longueur ajoutée soit égal au rapport de la longueur ajoutée sur la longueur initiale ?

b) Comment partager un segment en deux parties de telle manière que le rapport de la grande partie sur la petite partie soit égal au rapport du tout sur la grande partie ? Déterminer ce rapport.

c) Déterminer le côté du carré dont la valeur de l'aire augmente la valeur du côté de un.

d) Déterminer le nombre positif dont l'inverse le diminue de 1.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	Approche du nombre d'or
Résumé de l'activité	Calcul des rapports successifs de deux termes de la suite de Fibonacci montrant sa « convergence » vers le nombre d'or. Placement de points dans un repère à deux dimensions.
Type d'activité	Mise ne œuvre des connaissances du système de coordonnées
Degrés concernés	5P-8CO
Enoncé destiné aux élèves	Place ta feuille millimétrée verticalement. Trace un axe horizontal (abscisse) à environ 3 cm du bas de la feuille et un axe vertical (ordonnée) à environ 3 cm depuis la gauche de la feuille. Les lignes se croisent à l'emplacement du point de coordonnées (0,0). Place sur l'axe horizontal les nombres de 1 à 12 à intervalle régulier. Place sur l'axe vertical les nombres 1 et 2 de façon qu'ils soient à 10 cm de distance l'un de l'autre. A quoi correspond une distance de 1 cm sur cet axe ? A quoi correspond une distance de 1 mm sur cet axe ? Sur l'axe horizontal, le 1 correspond au 1^{er} quotient, que l'on obtient en divisant le 2^{e} nombre de Fibonacci par le 1^{er}. Le 2 correspond au 2^{e} quotient, que l'on obtient en divisant le 3^{e} nombre de Fibonacci par le 2^{e}. Et ainsi de suite, chaque nombre de l'axe horizontal représente le quotient de 2 nombres de Fibonacci. Sur l'axe vertical, on reporte la valeur de ces quotients, que tu calculeras avec 3 décimales.
Matériel	Papier millimétré Calculatrice
Durée	1 période
Propositions de déroulement	Cette activité doit avoir lieu après la découverte de la suite de Fibonacci. Les élèves travaillent seuls ou par 2. En 5P, construire ensemble le système de coordonnées et placer les nombres sur les axes horizontal et vertical.

Références aux contenus d’enseignement, plans d’études et moyens d’enseignement	Nombres rationnels Applications
Analyse préalable de l’activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l’enseignant)	Une première difficulté tient au fait que chaque couple est formé du numéro d’ordre d’un rapport et de la valeur de ce rapport. L’échelle inhabituelle en ordonnée peut créer quelques difficultés. La convergence apparaît rapidement, et au-delà du 8e quotient, il devient difficile de différencier la valeur en ordonnée.
Notions mathématiques susceptibles d’être mises en évidence	Convergence, limite
Liens interdisciplinaires	Présence du nombre d'or dans l'art depuis l’antiquité grecque.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Approche du nombre d'or

Matériel : une feuille millimétrée
calculatrice

Place ta feuille millimétrée verticalement.

Trace un axe horizontal (abscisse) à environ 3 cm du bas de la feuille et un axe vertical (ordonnée) à environ 3 cm depuis la gauche de la feuille. Les lignes se croisent à l'emplacement du point de coordonnées (0,0).

Place sur l'axe horizontal les nombres de 1 à 12 à intervalle régulier.

Place sur l'axe vertical les nombres 1 et 2 de façon qu'ils soient à 10 cm de distance l'un de l'autre. A quoi correspond une distance de 1 cm sur cet axe ? A quoi correspond une distance de 1 mm sur cet axe ?

Sur l'axe horizontal, le 1 correspond au 1er quotient, que l'on obtient en divisant le 2^{e} nombre de Fibonacci par le 1er. Le 2 correspond au 2^{e} quotient, que l'on obtient en divisant le 3^{e} nombre de Fibonacci par le 2^{e}. Et ainsi de suite, chaque nombre de l'axe horizontal représente le quotient de 2 nombres de Fibonacci.

Sur l'axe vertical, on reporte la valeur de ces quotients, que tu calculeras avec 3 décimales.

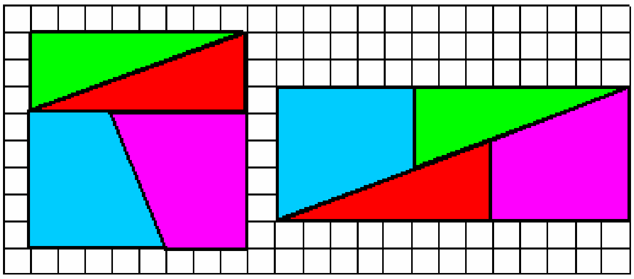
SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre	**Un paradoxe en or ?**
Résumé de l'activité	Comprendre une illusion d'optique menant au paradoxe suivant : en changeant la disposition des pièces d'un puzzle on gagne une unité d'aire, pourquoi ? Comment la suite de Fibonacci joue-t-elle un rôle essentiel dans la construction de ce paradoxe ?
Type d'activité	Recherche
Degrés concernés	8e - 9e CO à 1ère – 3e du PO

Enoncé destiné aux élèves

Enoncé.

a) Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2e figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?



b) Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ?

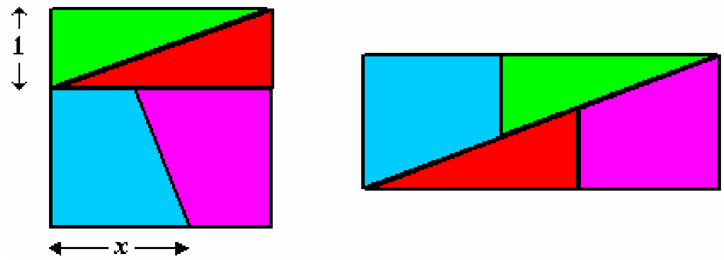
c) Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question.

d) On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55).
En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8;13;21) et (13;21;34) on a : $13^2 - 8\cdot 21 = 13\cdot 34 - 21^2$.

Est-ce vrai pour les suivants ? $13\cdot 34 - 21^2 \overset{?}{=} 34^2 - 21\cdot 55$.
Peut-on généraliser à $(f_{n-2}\ ; f_{n-1}\ ; f_n)$ et

$(f_{n-1}\ ; f_n\ ; f_{n+1})$ par $f_n^2 - f_n\cdot f_{n-2} \overset{?}{=} f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$?

e) En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence) démontre que pour un quadruplet (f_{n+1} ; f_{n+2} ; f_{n+3} ; f_{n+4}) de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$ selon la parité de n.
Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle'

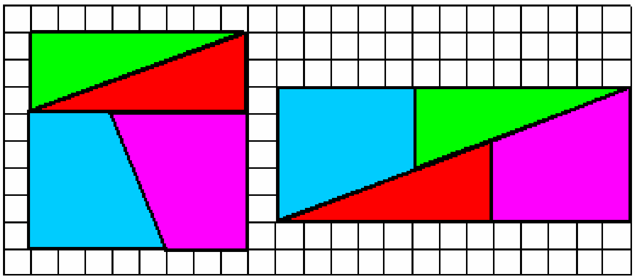
	devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu **f)** Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ? 
Matériel	Photocopie NB de l'énoncé pour les élèves. Eventuellement, une acétate couleur pour le rétroprojecteur.
Durée	Une à trois périodes selon l'engagement de la classe et l'ambition du prof
Proposition de déroulement	1. Travail à effectuer par petits groupes de 2-4 élèves. 2. Intervenir toutes les 5-10 minutes afin d'aiguiller les élèves dans leurs recherches. 3. Prendre appui sur les productions des élèves pour corriger peu à peu les différents points. 4. Adapter le rythme de travail, sa durée et le degré d'approfondissement des problèmes soulevés au niveau de la classe.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Selon l'age des élèves, les difficultés rencontrées sont très variables : - certains réfutent l'additivité des aires au lieu de remettre en question l'alignement des segments - d'autres bloquent sur l'écriture littérale - d'autres sur le calcul littéral, la manipulation d'expressions algébriques - et enfin, la plus grande difficulté est le passage de l'argument récursif sur un cas particulier au cas général. Il n'est pas inutile dans ce cas de s'assurer d'avoir traité suffisamment de cas particuliers (consécutifs) avant de passer à la démonstration formelle : si $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+2} = 1$. La récurrence pour prouver $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$ contient une légère difficulté supplémentaire. La preuve peut être présentée par l'enseignant.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	- aire du carré, du rectangle et du triangle - pente (rapport entre la dénivellation et la distance horizontale correspondante (pour des 8^e) ou taux de variation (pour des 1^e -2^e) - utilisation de l'écriture littérale pour formuler la conjecture. - démonstration par récurrence sur des cas particuliers. - démonstration générale par récurrence (davantage pour le PO) - modélisation d'une situation par une équation quadratique. - résolution d'une équation quadratique - approximation d'un irrationnel par une suite de rationnels
Développements possibles	Assemble les résultats précédents afin de démontrer rigoureusement : $\frac{f_2}{f_1} < \frac{f_4}{f_3} < \dots \frac{f_{2n}}{f_{2n-1}} < \dots < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \dots < \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} < \dots < \frac{f_5}{f_4} < \frac{f_3}{f_2}$

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Un paradoxe en or ?

Enoncé.

a) Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2e figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?



b) Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$.
Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ?

c) Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question.

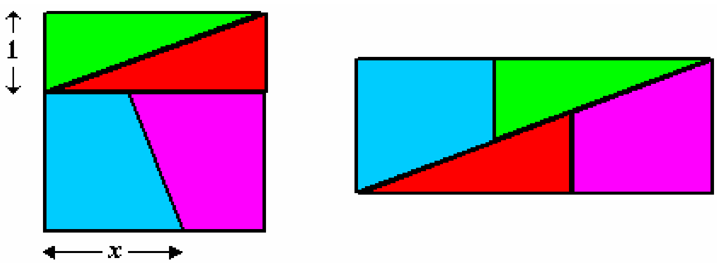
d) On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55).
En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8 ;13 ;21) et (13 ; 21 ; 34) on a : $13^2 - 8\cdot 21 = 13\cdot 34 - 21^2$.

Est-ce vrai pour les suivants ? $13\cdot 34 - 21^2 \overset{?}{=} 34^2 - 21\cdot 55$.

Peut-on généraliser à $(f_{n-2}\ ; f_{n-1}\ ; f_n)$ et $(f_{n-1}\ ; f_n\ ; f_{n+1})$ par $f_n^2 - f_n \cdot f_{n-2} \overset{?}{=} f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$?

e) En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence), démontre que pour un quadruplet $(f_{n+1}\ ; f_{n+2}\ ; f_{n+3}\ ; f_{n+4})$ de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$, selon la parité de n.
Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu.

f) Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ?



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Un paradoxe en or ?

Enjeux de l'activité.

Grosso modo il y a trois intentions pédagogiques derrière l'activité :
- faire comprendre que l'alignement (ou le non alignement) de points se démontre par le calcul de la pente (et non pas par une appréciation visuelle).
- faire découvrir la démonstration par récurrence dans un cas relativement simple : appliquer l'argument de récurrence sur plusieurs exemples particuliers afin de passer à l'argument général.
- faire apparaître le nombre d'or comme limite des quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci et discuter de son l'irrationalité.

Eléments de réponse.

a) Il suffit de comparer la pente du triangle rouge avec celle du trapèze rectangle violet pour déduire que l'apparente diagonale du rectangle est en fait une ligne brisée. La justification que 3/8 ≠ 2/5 peut s'appuyer sur l'un des arguments suivants :
1) les écritures décimales des deux fractions sont finies est distinctes
2) après amplification on obtient 15/40 ≠ 16/40
3) en utilisant le produit croisé, 15 ≠ 16
4) l'unicité d'écriture sous forme de faction irréductible à termes entiers positifs

b) Les trois termes appartiennent à la suite de Fibonacci et sont toujours consécutifs. On observe que la différence du carré du terme central et du produit des termes extrêmes égale toujours à ±1, d'une manière alternée.

c) Tester la conjecture sur (13 ; 21 ; 34), sachant qu'on a $13^2 - 8\cdot21 = 1$ revient à effectuer le calcul :
$13\cdot34 - 21^2 = 13\cdot(13 + 21) - 21^2 = 13^2 + 13\cdot21 - 21^2 = 13^2 + (13 - 21)\cdot21 = 13^2 - 8\cdot21 = 1$.
D'une manière générale, montrons que si $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = 1$.
En effet :

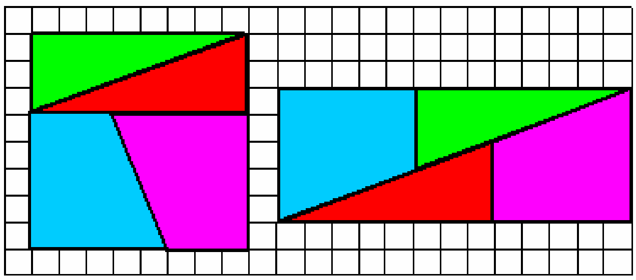
$$f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = f_{n+1}^2 - f_n\cdot\left(f_{n+1}+f_n\right) = f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+1} - f_n^2 = f_{n+1}\left(f_{n+1}-f_n\right) - f_n^2 = f_{n+1}\cdot f_{n-1} - f_n^2 = 1$$

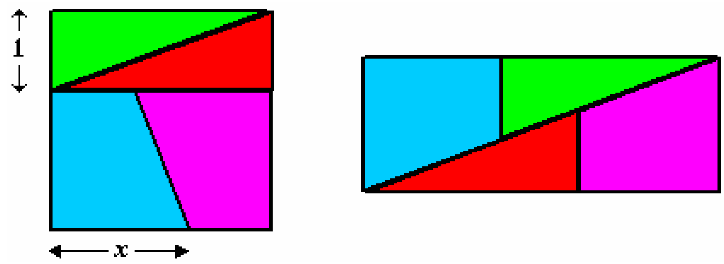
en utilisant le fait que $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ et que l'hypothèse de récurrence est $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$.

d) Montrons d'abord que $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = f_{n+1}\cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+3}$. En effet, comme $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, alors $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = f_{n+1}\cdot\left(f_{n+2} + f_{n+3}\right) - f_{n+2}\cdot\left(f_{n+1} + f_{n+2}\right) = f_{n+1}\cdot f_{n+3} - f_{n+2}^2$. Ce qui par le point **c)** égale à $f_{n+1}\cdot f_{n+2} - f_n\cdot f_{n+3}$. Par ailleurs, $f_1\cdot f_4 - f_2\cdot f_3 = 1\cdot3 - 1\cdot2 = 1$.
La différence des pentes du triangle appartenant au petit carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' = $\dfrac{f_{n+1}}{f_{n+3}} - \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+4}} = \dfrac{f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3}}{f_{n+3}\cdot f_{n+4}} = \dfrac{\pm1}{f_{n+3}\cdot f_{n+4}}$ par le résultat précédent.

e) L'équation obtenue en fonction de x est $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{2x+1}$. Ce qui revient à $x^2 - x - 1 = 0$. Pour la résoudre, on peut multiplier chacun des membres par 4, puis factoriser l'expression en complétant le carré : $4x^2 - 4x - 4 = (2x-1)^2 - 5 = (2x-1)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2x-1-\sqrt{5}\right)\left(2x-1+\sqrt{5}\right) = 0$
D'où la racine positive : $(1+\sqrt{5})\div 2$, notée par convention φ.
L'irrationalité du nombre précédent peut se démontrer ainsi : supposons que $x = a/b$ (a et b des entiers positifs premiers entre eux). Ecrivons l'équation de départ sous la forme $x = 1 + 1/x$. Si l'on substitue x par a/b on obtient alors $a/b = (a+b)/b$. La fraction du membre de droite est aussi irréductible car $(a;b) = 1$, ce qui ne peut se produire selon la remarque 4 du point **a)**.
La normalisation du carré construit à l'aide de trois nombres consécutifs de la suite de Fibonacci permet de déduire géométriquement que f_{n+1}/f_n converge vers φ, lorsque n tend vers l'infini.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre	**Un paradoxe en or ?**
Résumé de l'activité	Comprendre une illusion d'optique menant au paradoxe suivant : en changeant la disposition des pièces d'un puzzle on gagne une unité d'aire, pourquoi ? Comment la suite de Fibonacci joue-t-elle un rôle essentiel dans la construction de ce paradoxe ?
Type d'activité	Recherche
Degrés concernés	8^e - 9^e CO à 1ère – 3^e du PO
Enoncé destiné aux élèves	**Enoncé.** **a)** Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2^e figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?  **b)** Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci. La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ? **c)** Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question. **d)** On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci. Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55). En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8;13;21) et (13;21;34) on a : $13^2 - 8\cdot 21 = 13\cdot 34 - 21^2$. Est-ce vrai pour les suivants ? $13\cdot 34 - 21^2 \stackrel{?}{=} 34^2 - 21\cdot 55$. Peut-on généraliser à $(f_{n-2} ; f_{n-1} ; f_n)$ et $(f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1})$ par $f_n^2 - f_n \cdot f_{n-2} \stackrel{?}{=} f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$? **e)** En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence) démontre que pour un quadruplet (f_{n+1} ; f_{n+2} ; f_{n+3} ; f_{n+4}) de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$ selon la parité de n. Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle'

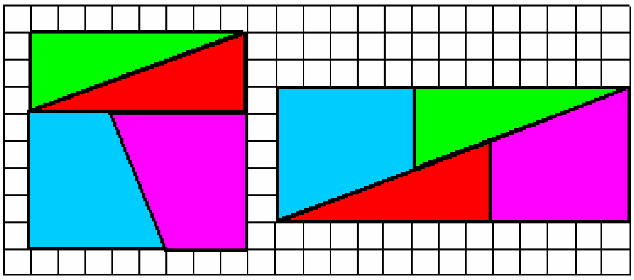
	devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu **f)** Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ? 
Matériel	Photocopie NB de l'énoncé pour les élèves. Eventuellement, une acétate couleur pour le rétroprojecteur.
Durée	Une à trois périodes selon l'engagement de la classe et l'ambition du prof
Proposition de déroulement	1. Travail à effectuer par petits groupes de 2-4 élèves. 2. Intervenir toutes les 5-10 minutes afin d'aiguiller les élèves dans leurs recherches. 3. Prendre appui sur les productions des élèves pour corriger peu à peu les différents points. 4. Adapter le rythme de travail, sa durée et le degré d'approfondissement des problèmes soulevés au niveau de la classe.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Selon l'age des élèves, les difficultés rencontrées sont très variables : - certains réfutent l'additivité des aires au lieu de remettre en question l'alignement des segments - d'autres bloquent sur l'écriture littérale - d'autres sur le calcul littéral, la manipulation d'expressions algébriques - et enfin, la plus grande difficulté est le passage de l'argument récursif sur un cas particulier au cas général. Il n'est pas inutile dans ce cas de s'assurer d'avoir traité suffisamment de cas particuliers (consécutifs) avant de passer à la démonstration formelle : si $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = 1$. La récurrence pour prouver $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$ contient une légère difficulté supplémentaire. La preuve peut être présentée par l'enseignant.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	- aire du carré, du rectangle et du triangle - pente (rapport entre la dénivellation et la distance horizontale correspondante (pour des 8^e) ou taux de variation (pour des 1^e -2^e) - utilisation de l'écriture littérale pour formuler la conjecture. - démonstration par récurrence sur des cas particuliers. - démonstration générale par récurrence (davantage pour le PO) - modélisation d'une situation par une équation quadratique. - résolution d'une équation quadratique - approximation d'un irrationnel par une suite de rationnels
Développements possibles	Assemble les résultats précédents afin de démontrer rigoureusement : $\frac{f_2}{f_1} < \frac{f_4}{f_3} < \dots \frac{f_{2n}}{f_{2n-1}} < \dots < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \dots < \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} < \dots < \frac{f_5}{f_4} < \frac{f_3}{f_2}$

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Un paradoxe en or ?

Enoncé.

a) Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2e figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?



b) Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$

Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ?

c) Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question.

d) On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55).
En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8 ;13 ;21) et (13 ; 21 ; 34) on a : $13^2 - 8\cdot 21 = 13\cdot 34 - 21^2$.

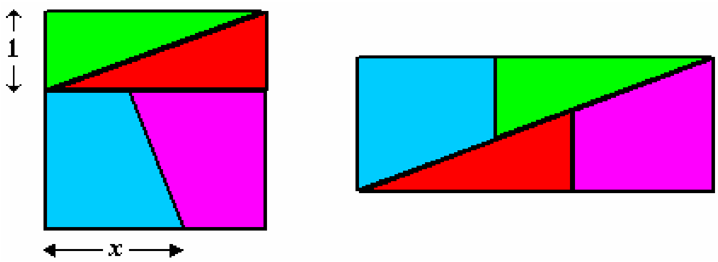
Est-ce vrai pour les suivants ? $13\cdot 34 - 21^2 \overset{?}{=} 34^2 - 21\cdot 55$.

Peut-on généraliser à $(f_{n-2}\ ;f_{n-1}\ ;f_n)$ et $(f_{n-1}\ ;f_n\ ;f_{n+1})$ par $f_n^2 - f_n\cdot f_{n-2} \overset{?}{=} f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$?

e) En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence), démontre que pour un quadruplet $(f_{n+1}\ ;f_{n+2}\ ;f_{n+3}\ ;f_{n+4})$ de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$, selon la parité de n.

Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu.

f) Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ?



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Un paradoxe en or ?

Enjeux de l'activité.

Grosso modo il y a trois intentions pédagogiques derrière l'activité :
- faire comprendre que l'alignement (ou le non alignement) de points se démontre par le calcul de la pente (et non pas par une appréciation visuelle).
- faire découvrir la démonstration par récurrence dans un cas relativement simple : appliquer l'argument de récurrence sur plusieurs exemples particuliers afin de passer à l'argument général.
- faire apparaître le nombre d'or comme limite des quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci et discuter de son l'irrationalité.

Eléments de réponse.

a) Il suffit de comparer la pente du triangle rouge avec celle du trapèze rectangle violet pour déduire que l'apparente diagonale du rectangle est en fait une ligne brisée. La justification que 3/8 ≠ 2/5 peut s'appuyer sur l'un des arguments suivants :
1) les écritures décimales des deux fractions sont finies est distinctes
2) après amplification on obtient 15/40 ≠ 16/40
3) en utilisant le produit croisé, 15 ≠ 16
4) l'unicité d'écriture sous forme de faction irréductible à termes entiers positifs

b) Les trois termes appartiennent à la suite de Fibonacci et sont toujours consécutifs. On observe que la différence du carré du terme central et du produit des termes extrêmes égale toujours à ±1, d'une manière alternée.

c) Tester la conjecture sur (13 ; 21 ; 34), sachant qu'on a $13^2 - 8\cdot 21 = 1$ revient à effectuer le calcul :
$13\cdot 34 - 21^2 = 13\cdot(13 + 21) - 21^2 = 13^2 + 13\cdot 21 - 21^2 = 13^2 + (13 - 21)\cdot 21 = 13^2 - 8\cdot 21 = 1$.
D'une manière générale, montrons que si $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = 1$.
En effet :

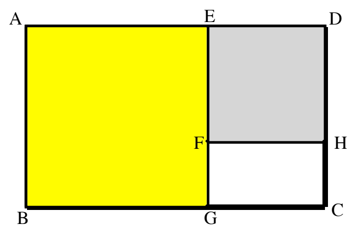
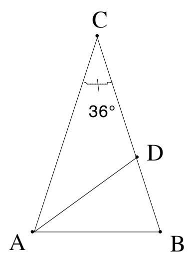
$$f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = f_{n+1}^2 - f_n \cdot (f_{n+1} + f_n) = f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+1} - f_n^2 = f_{n+1}(f_{n+1} - f_n) - f_n^2 = f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = 1$$

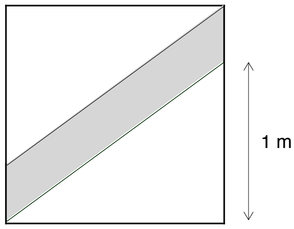
en utilisant le fait que $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ et que l'hypothèse de récurrence est $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$.

d) Montrons d'abord que $f_{n+1} \cdot f_{n+4} - f_{n+2} \cdot f_{n+3} = f_{n+1} \cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+3}$. En effet, comme $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, alors $f_{n+1} \cdot f_{n+4} - f_{n+2} \cdot f_{n+3} = f_{n+1} \cdot (f_{n+2} + f_{n+3}) - f_{n+2} \cdot (f_{n+1} + f_{n+2}) = f_{n+1} \cdot f_{n+3} - f_{n+2}^2$. Ce qui par le point **c)** égale à $f_{n+1} \cdot f_{n+2} - f_n \cdot f_{n+3}$. Par ailleurs, $f_1 \cdot f_4 - f_2 \cdot f_3 = 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 = 1$.
La différence des pentes du triangle appartenant au petit carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' = $\dfrac{f_{n+1}}{f_{n+3}} - \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+4}} = \dfrac{f_{n+1} \cdot f_{n+4} - f_{n+2} \cdot f_{n+3}}{f_{n+3} \cdot f_{n+4}} = \dfrac{\pm 1}{f_{n+3} \cdot f_{n+4}}$ par le résultat précédent.

e) L'équation obtenue en fonction de x est $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{x}{2x+1}$. Ce qui revient à $x^2 - x - 1 = 0$. Pour la résoudre, on peut multiplier chacun des membres par 4, puis factoriser l'expression en complétant le carré : $4x^2 - 4x - 4 = (2x-1)^2 - 5 = (2x-1)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2x - 1 - \sqrt{5}\right)\left(2x - 1 + \sqrt{5}\right) = 0$
D'où la racine positive : $(1+\sqrt{5}) \div 2$, notée par convention φ.
L'irrationalité du nombre précédent peut se démontrer ainsi : supposons que $x = a/b$ (a et b des entiers positifs premiers entre eux). Ecrivons l'équation de départ sous la forme $x = 1 + 1/x$. Si l'on substitue x par a/b on obtient alors $a/b = (a+b)/b$. La fraction du membre de droite est aussi irréductible car $(a;b) = 1$, ce qui ne peut se produire selon la remarque 4 du point **a)**.
La normalisation du carré construit à l'aide de trois nombres consécutifs de la suite de Fibonacci permet de déduire géométriquement que f_{n+1} / f_n converge vers φ, lorsque n tend vers l'infini.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	Dérivation géométrique de l'équation pour ϕ
Résumé de l'activité	Trois activités à traiter en parallèle, qui font apparaître, dans trois situations différentes, la même équation, dont la solution est le nombre d'or.
Type d'activité	Activité de recherche et de développement.
Degrés concernés	CO – PO
Enoncé destiné aux élèves	1. Rectangle Quelles doivent être les dimensions du rectangle ABCD si l'on veut que le rapport entre l'aire du carré ABGE et le rectangle ABCD soit égal au rapport entre l'aire du carré DEFH et celle du rectangle CDEG ?  2. Triangle Le triangle ci-dessous est un triangle isocèle dont l'angle ACB vaut 36°. Le segment AD est la bissectrice de l'angle CAB.  Calculer le rapport entre les segments CD et DB. 3. Carré

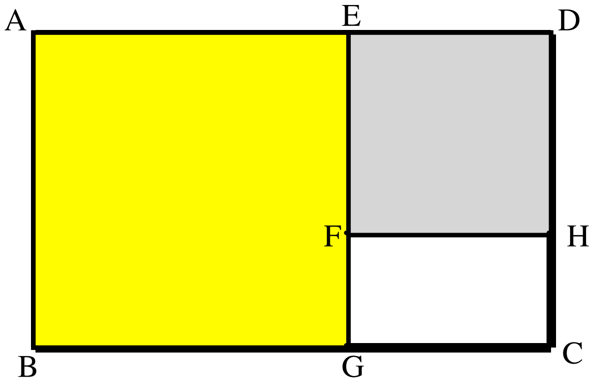
	Quelles doivent être les dimensions du carré ci-dessous si l'on veut que l'aire ombrée soit égale à 1 m^2 ? 
Matériel	Papier, crayon et calculatrice
Durée	45 min
Propositions de déroulement	Travail en groupe, une partie des élèves résolvant l'activité rectangle, une autre l'activité triangle et la troisième l'activité carré. Prendre en compte que l'activité carré est la plus facile et l'activité triangle la plus difficile.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Calcul d'aire. Rapports. Triangles isocèles Calcul et somme d'angles. Situation de proportionnalité et théorème de Thalès. . Calcul littéral. Equation réductible au deuxième degré [A*u CO solution à donner, voir justifications donnés à la fin de la fiche du maître.*]
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	1. Aucune mesure n'étant donnée, cette question mène à une équation dont l'inconnue est le rapport entre les dimensions du rectangle. Pour éviter cette difficulté, il est possible d'ajouter dans l'énoncé une donnée numérique ; par exemple : « l'aire du carré ABGE vaut 1 m^2 » ou « la longueur AB vaut 1 dm », …… 2. Aucune mesure n'étant donnée, cette question mène à une équation dont l'inconnue est le rapport entre les dimensions des deux triangles semblables (ou le rapport entre le côté et la base du triangle d'or). Pour éviter cette difficulté, il est possible d'ajouter dans l'énoncé une donnée numérique ; comme : « la base du triangle AB vaut 1 dm », …… 3. Cette activité demandant moins de temps que les deux autres, il devrait être possible de demander aux élèves des groupes qui la traitent de chercher par tâtonnement la solution de l'équation du deuxième degré. En divisant par x, l'équation $x^2 - x = 1$, et nommant ϕ la solution, on

	peut voir que $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ et chercher ensuite le nombre ϕ dont l'inverse est égal à la différence de ϕ et de 1.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Triangles semblables et similitudes. Rapports, rapport d'or. Equations. Aire d'un parallélogramme. Calcul littéral. Transformation d'équations.
Développements possibles	Nombre d'or : indiquer que la valeur obtenue pour le rapport entre les côtés du rectangle d'or, le côté et la base du triangle d'or, la longueur du côté du carré défini dans l'activité est généralement appelée ϕ (phi) .
Liens interdisciplinaires	Histoire des sciences et des arts. Sciences naturelles.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enoncé *Activité 1 : Le rectangle d'or*

Quelles doivent être les dimensions du rectangle ABCD si l'on veut que le rapport entre l'aire du carré ABGE et le rectangle ABCD soit égal au rapport entre l'aire du carré DEFH et celle du rectangle CDEG ?

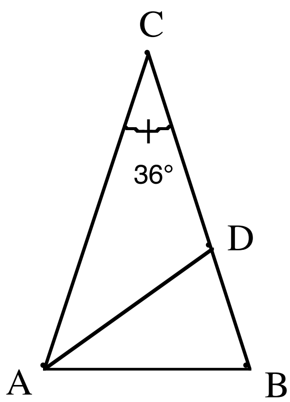


Autre énoncé possible (7ème et 8ème du CO)
Si la longueur AB vaut 1dm, quelle doit être la longueur du côté BC si l'on veut que le rapport entre l'aire du carré ABGE et le rectangle ABCD soit égal au rapport entre l'aire du carré DEFH et celle du rectangle CDEG ?

Enoncé *Activité 2 Le triangle*

Le triangle ci-contre est un triangle isocèle dont l'angle ACB vaut 36°. Le segment AD est la bissectrice de l'angle CAB.

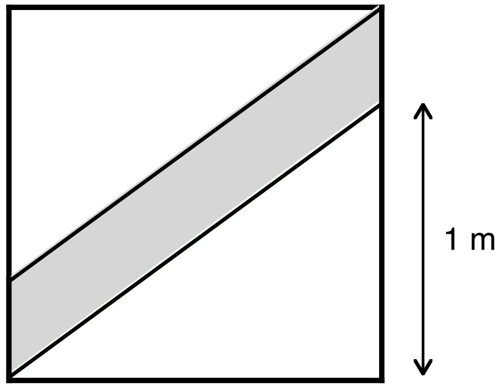
Calculer le rapport entre les segments CD et DB.



Autre énoncé possible (7ème et 8ème du CO)
Le triangle ci-dessous est un triangle isocèle dont la longueur du côté AB vaut 1 dm et l'angle ACB vaut 36°. Sachant que le segment AD est la bissectrice de l'angle CAB, calculer le rapport entre les segments CD et DB.

Enoncé *Activité 3 : Le carré d'or*

Quelles doivent être les dimensions du carré ci-contre si l'on veut que l'aire ombrée soit égale à 1 m^2 ?



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Dérivation géométrique de l'équation pour ϕ

Enjeux de l'activité

Ces trois questions menant toutes à la même solution, le rapport d'or (le nombre d'or), ont pour objectif de « créer un mystère » qui devrait permettre à l'enseignant de présenter ce nombre "historique", la divine proportion ou section dorée, qui allie mythe réalité. (Cf. Partie théorique de la semaine des maths et sites extérieurs cités.)

Indications

Ces trois activités ont été créées en partant de situations qui font partie de l'histoire des mathématiques.

L'activité « **rectangle** », en fait un rectangle d'or, est liée à l'approximation de la construction par carrés successifs, carrés dont les côtés sont donnés par la suite de Fibonacci, d'un rectangle d'or.

L'activité « **triangle** » est liée à la construction, à la règle et au compas, du décagone et donc de ce fait du pentagone.
L'étude de ce triangle, cas particulier du rapport d'or dans le pentagramme, « pentagramme chéri par les pythagoriciens », permet de réduire l'étude générale des différents rapports d'or à un cas particulier.

L'activité « **carré** » n'est qu'un clown, à peine déguisé, de la résolution antique, avant l'invention de l'algèbre, de l'équation : « $x^2 = x+1$ ». (Cf. ci-dessous page 5)

Développements possibles

Géométriques

1. Les enseignant(e)s dont les élèves ne possèdent pas les bases algébriques suffisantes pour résoudre l'équation « $x^2 = x+1$ » et qui souhaitent justifier ses solutions trouveront, après les corrigés des trois activités, la méthode géométrique utilisée pour résoudre cette équation avant l'invention du calcul algébrique.[1]

Algébriques

2. Les enseignant(e)s, dont les élèves ont déjà travaillé les identités remarquables mais qui ne possèdent pas encore les bases algébriques suffisantes pour résoudre l'équation « $x^2 = x+1$ », qui souhaitent justifier ses solutions trouveront, après les corrigés des trois activités, la méthode pour la résoudre par complétion du carré.
3. Voir, en partant de l'équation : « $x^2 = x+1$ » que $x^2 - x = 1$, puis en divisant par x, que $\frac{1}{x} = x^{-1} = x - 1$.
4. Voir, en partant de l'équation : « $x^2 = x+1$ » que
« $x^3 = x(x^2) = x(x+1) = x^2 + x = (x+1) + x = 2x + 1$ » puis généraliser ce résultat.

[1] Une introduction à l'histoire de l'algèbre.
Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance.
Jacques Sesiano 1996 . Ed. PPUR, EPFL.

Eléments de réponse

Correction activité 1 : rectangle

Cas général

Dans le rectangle ABCD, appelons a la longueur du côté AB et b la longueur du côté BC.

On a alors : AB = EG = DC = a
BC = AD = b
ED = FH = GC = b – a

Et, $A_{ABCD} = ab$
$A_{ABGE} = a^2$
$A_{EGCD} = a(b–a)$
$A_{EFHD} = (b–a)^2$

Pour que les rapports entre les aires des carrés et des rectangles successifs soient égaux, il faut que :

$$\frac{A_{ABGE}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{EFHD}}{A_{EGDC}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{ab} = \frac{(b-a)^2}{a(b-a)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{a}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - 1$$

Si l'on pose : $\frac{b}{a} = x$, on obtient l'équation : $\frac{1}{x} = x - 1$

équation que l'on peut transformer en la multipliant par x de manière à obtenir :

$$\frac{1}{x} \cdot x = (x-1) \cdot x \Leftrightarrow 1 = x^2 - x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$$

Cas simplifié : AB = 1

Dans le rectangle ABCD, appelons x la longueur du côté BC.

On a alors : AB = EG = DC = 1
BC = AD = x
ED = FH = GC = x – 1

Et, $A_{ABCD} = x$
$A_{ABGE} = 1$
$A_{EGCD} = x–1$
$A_{EFHD} = (x–1)^2$

Pour que les rapports entre les aires des carrés et des rectangles soient égaux, il faut que :

$$\frac{A_{ABGE}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{EFHD}}{A_{EGDC}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1} - \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x - 1$$

équation que l'on peut transformer en la multipliant par x de manière à obtenir :

$$\frac{1}{x} \cdot x = (x-1) \cdot x \Leftrightarrow 1 = x^2 - x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$$

Si les élèves ne connaissent pas la formule, dite de Viète, donner la solution de l'équation ci-dessus. Pour justifier la solution donnée, il est possible de passer par la résolution géométrique ou par complétion du carré de l'équation $x^2=x+1$ qui se trouvent après les trois corrections.

Correction activité 2 : triangle

Cas général

Dans le triangle ABD, appelons a la longueur du côté AC et b la longueur du côté AC.

Le triangle ABC étant isocèle les angles CAB et CBA sont égaux et valent chacun 72°.

AD étant la bissectrice de CAB, les angles CAD et DAB sont égaux et valent chacun 36°.

Le triangle ADC est donc isocèle (ACD = CAD = 36°), d'où : AD = DC
Le triangle ABD est également isocèle (ADB `ABD = 72°), d'où : AD = AB

On a alors : AB = AD = DC = b
AC = BC = a
BD = a–b

Les triangles ABC et ABD ayant des angles égaux (triangles semblables) les rapports entre les côtés homologues sont constants (grandeurs proportionnelles).

On a : $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} - 1$

Le rapport cherché étant :
$\frac{CD}{DB} = \frac{b}{a-b}$, on voit, en posant $x = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ que l'égalité ci – dessus

donne l'équation : $\frac{1}{x} = x - 1$

équation que l'on peut transformer en la multipliant par x de manière à obtenir :

$$\frac{1}{x} \bullet x = (x-1) \bullet x \Leftrightarrow 1 = x^2 - x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$$

Cas simplifié : AB = 1

Dans le triangle ABD, appelons x la longueur du côté AC.

On a : AB = AD = DC = 1
AC = BC = x
BD = x–1

Le rapport cherché étant : $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{x-1}$, et les triangles ABC et ABD ayant des angles égaux,

on a :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow (x-1) \bullet x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$$

Si les élèves ne connaissent pas la formule, dite de Viète, donner la solution de l'équation ci-dessus. Pour justifier la solution donnée, il est possible de passer par la résolution géométrique ou par complétion du carré de l'équation x^2=x+1 qui se trouvent après les trois corrections.

Correction activité 3 : carré

Méthode 1° : Calcul de l'aire du parallélogramme

Appelons x la longueur d'un des côtés du carré.

L'aire du parallélogramme ombré est alors égale à : $(x-1)\cdot x \Leftrightarrow x^2 - x$

Cette aire devant être égale à 1, on peut poser : $x^2 - x = 1$

et obtenir l'équation : $x^2 = 1 + x$

Méthode 2° : Calcul de l'aire du carré et des deux triangles rectangles

Appelons x la longueur d'un des côtés du carré.

L'aire du carré est égale à : x^2

et l'aire de chacun de triangles est égale à : $\frac{x \cdot 1}{2}$

L'aire du parallélogramme ombré est alors égale à : $x^2 - 2\frac{x \cdot 1}{2} = x^2 - x$

Cette aire étant égale à 1, on peut poser : $x^2 - x = 1$

Et obtenir l'équation : $x^2 = 1 + x$

Si les élèves ne connaissent pas la formule, dite de Viète, donner la solution de l'équation ci-dessus. Pour justifier la solution donnée, il est possible de passer par la résolution géométrique ou par complétion du carré de l'équation $x^2=x+1$ qui se trouvent après les trois corrections.

Indication complémentaire

La troisième partie de cette activité étant plus simple (plus courte) que les deux autres, il peut être intéressant de :

1. En transformant l'équation : « $x^2 = x+1$ » en « $x^2 - x = 1$ », puis en divisant la deuxième par x : $\frac{1}{x} = x^{-1} = x - 1$. (*Un nombre dont l'inverse est inférieur d'une unité à sa valeur.*)
2. Laisser les élèves chercher avec leur calculatrice, par approximations successives, un nombre dont le carré dépasse d'une unité sa valeur.

Résolution géométrique de l'équation : $x^2 = x + 1$

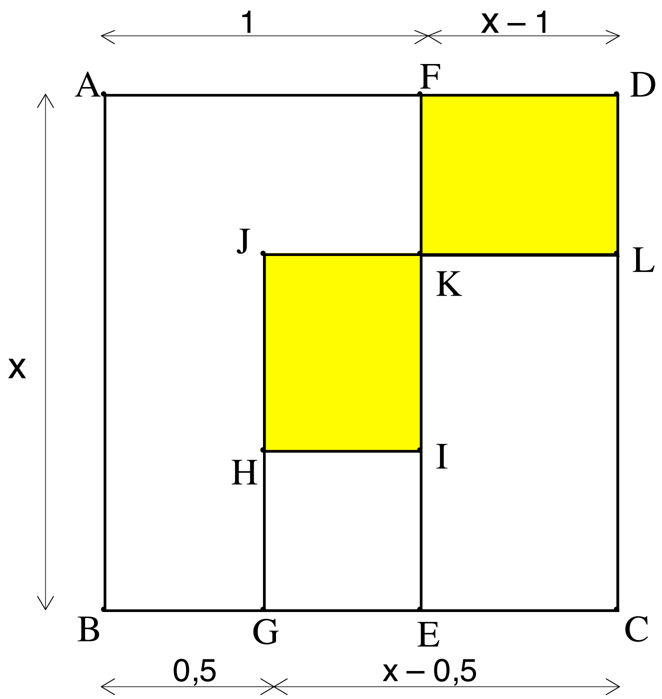
Pour résoudre cette équation nous allons placer dans un carré ABCD d'aire :

$\mathbf{A_{ABCD} = x^2}$

deux rectangles ABEF et FECD dont les aires respectives valent :

$\mathbf{A_{ABEF} = x}$ (AF = BE = 1) et $\mathbf{A_{FECD}} = 1$

Après avoir placé le point G au milieu du segment BE (BG = GE = 0,5), on trace une perpendiculaire à BC passant par G.
Sur cette perpendiculaire, on place le point H de manière à ce que GH = GE (GH = 0,5) et J de manière à ce que HJ = EC (HJ = x – 1).



Par construction, le quadrilatère JGCL et un carré (GC = GJ) et son aire vaut :

$\mathbf{A_{JGCL} = (x–0,5)^2}$

Les deux rectangles JHIK et FKLD étant égaux

DL = DC – LC = 0,5 et KI = JH = EC = FD = x – 1,

on peut connaître l'aire du carré JGCL en le décomposant de la manière ci-dessous :

$\mathbf{A_{JGCL} = (A_{KECL} + A_{JHIK}) + A_{GEIH} = A_{FECD} + A_{GEIH} = 1 + 0,5^2}$

On a donc :

$\mathbf{A_{JGCL} = (x–0,5)^2 = 1 + 0,5^2}$

Equation que l'on peut résoudre en prenant la racine positive (x > 1) des deux cotés de l'égalité.

On obtient alors : $x = 0,5 + \sqrt{(1 + 0,25)} = 0,5 + \frac{\sqrt{4 \times 1,25}}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$

Résolution de l'équation : $x^2 = x + 1$ par complétion du carré

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

D'où

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Et comme x >1, on peut écrire : $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

SEMAINE DE L'ARITHMÉTIQUE

Titre de l'activité	Fraction continue.
Résumé de l'activité	En utilisant (sans le savoir) le développement en fraction continue du nombre d'or, montrer que les quotients de deux nombres de Fibonacci successifs tendent vers le nombre d'or.
Type d'activité	Calculatoire, pratique de l'utilisation de la machine, déduction
Degrés concernés	De 8 CO à 3 PO
Énoncé destiné aux élèves	Le but est d'arriver à calculer le nombre suivant : $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$ Tout d'abord par des approximations à la machine, ce qui permet de constater que numériquement les approximations convergent vers une certaine valeur, notée Φ. Calculer ces approximations successives sous forme de fractions irréductibles. Trouver une équation pour Φ. La résoudre.
Matériel	Papier, crayon, machine à calculer
Durée	2 ou 3 périodes
Propositions de déroulement	Au départ laisser les élèves essayer de calculer ce nombre à la machine.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Pratique du calcul de fractions, mise en équation et résolution de d'équation du deuxième degré.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Au début de l'activité, deux difficultés peuvent apparaître la première est d'ordre théorique, puisqu'il y a une infinité de calculs à faire. Les élèves ne sauront pas comment gérer les « ... » Ils devraient néanmoins réussir à imaginer de s'arrêter après un certain nombre de barres de fractions. La seconde d'ordre technique est d'arriver à calculer efficacement ces approximations successives avec une machine. En effet pour éviter des parenthésages successifs, il faut commencer par calculer le dernier dénominateur. Dans le deuxième exercice, il faut insister sur l'exigence d'obtenir une fraction.

Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	L'idée de suite et de limite.
Développements possibles	L'idée de fraction continue.
Liens interdisciplinaires	Histoire de l'art et de l'architecture.

Un calcul qui en vaut la peine.

Que peut bien valoir le nombre suivant?

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$

Exercice 1 :
Trouver un moyen de calculer efficacement avec votre machine de plus en plus « d'étages ».
Que remarquez-vous?

Exercice 2 :
Ramener sous forme de fractions les nombres obtenus en remplaçant ce qu'il y a après le premier « + »
par 0, puis faire de même avec le deuxième « + », puis avec le troisième, etc.

$$1+0=1 \qquad 1+\frac{1}{1+0}=2 \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+0}}=\frac{3}{2}$$

Calculer les 10 premiers termes. Que remarquez-vous?

Question subsidiaire : Qu'elle est la valeur du nombre remplacé par « 0 » à chaque étape?

Exercice 3 :
Notons $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$

Pouvez-vous trouver, en vous aidant de l'exercice précédent, une équation que doit satisfaire Φ. Résoudre cette équation.

Un calcul qui en vaut la peine.

Exercice 1:
Que peut bien valoir le nombre obtenu par la recette suivante?

Premier pas : taper la touche

$\boxed{1}$

Deuxième pas : taper la suite de touches

$\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

Troisième pas : noter le résultat (mais sans l'effacer de la machine)

Répéter les deuxièmes et troisièmes pas.

Que remarquez-vous?

Donnez l'expression arithmétique, sans la simplifier, que vous venez de calculer à la machine après un pas, après deux pas, après trois pas.

Après avoir répéter une infinité de fois la recette, voilà le nombre qu'on a cherché à calculer~:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Exercice 2 :
Ramener sous forme de fractions les nombres obtenus en remplaçant ce qu'il y a après le premier ``+"
par 0, puis faire de même avec le deuxième ``+", puis avec le troisième, etc.

$$1+0=1 \qquad 1+\frac{1}{1+0}=2 \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+0}}=\frac{3}{2}$$

Calculer les 10 premiers termes. Que remarquez-vous?

Question subsidiaire : Qu'elle est la valeur du nombre remplacé par ``0" à chaque étape?

Exercice 3 :

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Pouvez-vous trouver, en vous aidant de l'exercice précédent, une équation que doit satisfaire Φ. Résoudre cette équation.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enjeux de l'activité :

Le but de cette page d'exercices est de faire découvrir un lien entre les nombres de Fibonacci et le nombre d'or. Plus précisément de permettre à l'élève de se convaincre, par des manipulations arithmétiques, que la limite du rapport entre deux nombres de Fibonacci successifs est égale au nombre d'or. Il est important d'avoir présenté auparavant la suite de Fibonacci ainsi que le nombre d'or soit par des activités introductives, soit par une présentation préalable pouvant contenir des informations non seulement mathématiques, mais aussi culturelles.

Éléments de réponses

Le but du premier exercice est de se convaincre numériquement que la suite obtenue en tronquant après un certain nombre d'étapes converge.

$x_1 = 1 + 0$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1+0}$, $x_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}$, $x_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}}$, … Cette suite converge.

L'exemple ci-dessus est un exemple de troncature, c'est-à-dire le fait de remplacer la fin d'une expression arithmétique par zéro.

Pour ce faire, il faut être capable d'employer sa machine efficacement pour calculer ces approximations.

Une alternative : La deuxième feuille de données est une entrée alternative dans le problème.
On a remplacé l'exercice 1 par un exercice inversé.
Le but de cet exercice est de faire découvrir à l'élève la fraction continue

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Dans cette approche alternative, il est impératif de mettre en commun le travail des élèves après le premier exercice pour pouvoir dégager la formule précédente avant de commencer les exercices 2 et 3. Il faut aussi faire apparaître le fait que les calculs faits sur machine approchent le nombre en question.

Le deuxième exercice doit permettre de voir que les troncatures successives sont des quotients de nombres de Fibonacci successifs par calcul (on peut même le démontrer avec des élèves plus âgés en faisant une induction plus ou moins formelle).
Essayer de faire remarquer qu'il n'est pas nécessaire de refaire tous les calculs à chaque pas.
En effet ce que l'on trouve sous la première barre de fraction est exactement le terme que l'on a calculé précédemment. Si

Proposition d'activité Semaine des maths Version du 15 juillet 05

$x_1 = 1 + 0$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1+0}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+0}}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+0}}}$, $x_5 = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+0}}}}$, …

On peut remarquer que

$x_1 = 1 + 0$, $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{x_2}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{x_3}$, $x_5 = 1 + \frac{1}{x_4}$, …

En faisant les calculs on obtient

$x_1 = 1 = \frac{1}{1}$, $x_2 = 2 = \frac{2}{1}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{x_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, $x_5 = 1 + \frac{1}{x_4} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$, …

On remarque que x_i est le quotient de F_{i+1} par F_i.

La preuve de cette remarque se fait par induction, puisque, par hypothèse d'induction, $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

La question subsidiaire est là pour faire prendre conscience que la partie négligée est toujours la même et est égale au nombre cherché.

En utilisant la même idée que celle des calculs réutilisables du deuxième exercice ainsi que la réponse à la question subsidiaire, le troisième exercice permet d'arriver à la formule $\Phi = 1 + 1/\Phi$ et de résoudre cette équation.

La question intermédiaire

En multipliant par on obtient l'équation $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, qui est l'équation dont les deux solutions sont

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Reste à mettre les choses ensemble : Le nombre représenté Φ par l'expression de départ est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puisque $\Phi > 1$, la nième troncature de l'expression de départ est égale à $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ et numériquement on voit que ces troncatures tendent vers Φ.

Un seul point resterait à développer : peut-on montrer la convergence facilement? Une preuve de cela est donnée dans l'activité « limite de F_{n+1} / F_n ». Néanmoins une preuve formelle de la convergence de cette suite n'est pas utile à ce niveau.

Cela peut déboucher sur une explication sur la notion de fractions continues.

Rappelons brièvement ce qu'est une fraction continue.

Pour cela rappelons deux notations.

Pour un nombre positif s, notons [s] le plus grand entier plus petit que s et {s} la partie fractionnaire de s.

Par exemple pour s = 2,345, [s] = 2 et {s} = 0,345.

Il est clair que s = [s] + {s}. De plus dans le cas où s est une fraction s = p/q, [s] est le résultat de la division entière de p par q et {s} est le reste de cette même division entière.

On appelle fraction continue d'un nombre s l'expression finie ou infinie obtenue par le procédé suivant :

Comme s = [s] +{s} et que $0 \leq \{s\} < 1$, si {s} = 0, on s'arrête, sinon on peut écrire $s = [s]+1/\{s\}^{-1}$ avec maintenant $1/\{s\}^{-1} > 1$. On peut donc répéter pour $1/\{s\}^{-1}$ la même décomposition $1/\{s\}^{-1} = [1/\{s\}^{-1}] + \{1/\{s\}^{-1}\}$.

$s = [s]+1/([\{s\}^{-1}]+\{1/\{s\}^{-1}\})$ avec à nouveau $0 \leq \{1/\{s\}^{-1}\} < 1$. Rien n'empêche de continuer ce procédé tant que la partie fractionnaire obtenue au pas précédent est non nulle.

Exemples : 96/67 = 1 + 29/67 = 1 + 1/(67/29) = 1 + 1/(2+9/29) = 1 + 1/(2+1/(29/9)) = 1+1/(2+1/(3+2/9))

= 1 + 1/(2+1/(3+1/(9/2))) = 1 + 1/(2+1/(3+1/(4 + 1/2))); on obtient donc

$$\frac{96}{67} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Pour 2,345 on obtient :
2,345 = 2 + 0,345 = 2 + 1/(1000/345) = 2 + 1/(2 +310/ 345) = 2 + 1/(2 + 1/ (345/ 310))
= 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 35/ 310)) = 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(310/ 35))) = 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 30/ 35)))
= 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 1/(35/ 30)))) = 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 1/(1 + 5/ 30))))
= 2 + 1/(2 + 1/ (1 + 1/(8 + 1/(1 + 1/ 6)))).

Il est assez facile de voir que ce procédé se termine après un nombre fini d'étapes si et seulement si le nombre dont on est parti est une fraction.

Dans le cas de $1 < \Phi < 2$, sa décomposition en fraction continue est
$\Phi = [\Phi] + \{\Phi\} = 1 + (\Phi-1) = 1 + 1/(\Phi-1)^{-1} = 1 + 1/(\Phi^{-1})^{-1} = 1 + 1/\Phi$; puisque $\Phi-1 = 1/\Phi$.

En réitérant ce calcul, on obtient bien l'expression

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	Là-haut sur la montagne Activité tirée des moyens d'enseignement 6P (LM p.72, LE p.25)
Résumé de l'activité	Activité de découverte de la suite de Fibonacci.
Type d'activité	Recherche / réinvestissement
Degrés concernés	5P-9CO
Enoncé destiné aux élèves	Le sentier en lacets qui mène à l'alpage comporte des raccourcis reliant deux virages voisins. Combien y a-t-il de trajets possibles pour se rendre à l'alpage, toujours en montant ?
Matériel	Fiche d'élève
Durée	1 période
Propositions de déroulement	Travail individuel ou par 2. Démarrage libre, puis relance après 5-10 minutes pour les élèves qui ne voient pas comment s'y prendre, ou pour ceux qui fournissent une réponse dont ils ne peuvent être sûrs (voir ci-dessous).
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Reconnaître, établir des suites numériques et exprimer leur loi de formation.

Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	◆ Dessin de chaque chemin avec une couleur différente (rapidement inopérant à cause du recouvrement des couleurs, et par manque d'un nombre suffisant de couleurs différentes) ◆ Codage des carrefours de 0 à 9, et liste d'itinéraires différents (fastidieux, et peu propice à prouver l'exhaustivité) ◆ Dessin de chaque itinéraire sur un nouveau schéma (mêmes limites que ci-dessus) Relance générale : observer ce qui se passe si on place le chalet sur l'un ou l'autre des carrefours du bas du sentier. On voit apparaître la suite de Fibonacci, encore faut-il expliquer pourquoi !

Là-haut sur la montagne

Le sentier en lacets qui mène à l'alpage comporte des raccourcis reliant deux virages voisins.
Combien y a-t-il de trajets possibles pour se rendre à l'alpage, toujours en montant ?

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

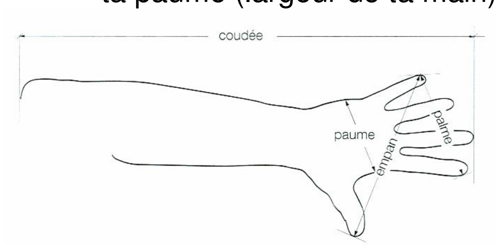
Titre de l'activité	Nombre d'or et corps humain : la canne des bâtisseurs, le modulor de le Corbusier.
Résumé de l'activité	Mesures et calculs de rapports à partir du corps humain tendant plus ou moins vers le nombre d'or.
Type d'activité	Expérimentale, entraînement au calcul
Degrés concernés	5P – 8^e
Enoncé destiné aux élèves	Le Corbusier, architecte du 20^e siècle, a choisi d'utiliser certaines dimensions du corps humain pour dessiner des meubles et des espaces de vie. Il ne faisait que reprendre des habitudes très anciennes de définir des unités de mesure de longueur à partir du corps. Ainsi tu as sans doute entendu parler du pied ou de la coudée. a) Mesure au demi-centimètre près les longueurs suivantes : - ta coudée (du coude au bout des doigts), - ton pied, - ton empan (de l'extrémité du pouce à celle du petit doigt, doigts écartés), - ta palme (de l'extrémité de l'index à celle du petit doigt, doigts écartés), - ta paume (largeur de ta main). Ces différentes longueurs constituaient ce qu'on appelait la « canne des bâtisseurs » ou la « quine », car composée de 5 longueurs. Présente les résultats de la quine dans un tableau et calcule tous les rapports entre deux mesures successives, la plus grande divisée par la plus petite. Compare ces rapports avec ceux de tes camarades. Que constate-t-on ? b) Le Corbusier a nommé une suite de rapports calculés à partir du corps humain « le Modulor » (voir dessin). Tu vas mesurer le Modulor sur toi-même. Mesure au demi-centimètre près les longueurs suivantes - ta taille - la hauteur de ton coude depuis le sol, bras croisés - la hauteur depuis le sol jusque sous ton coude quand tu es assis, pieds à plat sur le sol - la hauteur depuis le sol jusque sous ton genou quand tu es assis, pieds à plat sur le sol - la hauteur depuis le sol jusqu'à la partie la plus proéminente de ton mollet. Présente ces résultats dans un tableau et calcule tous les rapports entre deux mesures successives, la plus grande divisée par la plus petite. Compare ces rapports avec ceux de tes camarades. Que constate-t-on ? c) Certains prétendent que ces rapports tendent vers le rapport d'or, la « divine proportion » de Fibonacci (mathématicien italien du 12^e siècle) qui vaut $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \cong 1{,}618$. Pour comparer les rapports trouvés au nombre d'or, il faut définir une valeur de chaque rapport pour toute la classe ? Calculez cette valeur. Lequel des rapports calculés correspond le mieux au nombre d'or ?

Matériel	Plusieurs mètres-ruban, mètres pliants, calculatrice
Durée	Deux leçons de 45 minutes, ou plus selon les prolongements qu'on veut donner en évoquant Fibonacci ou l'œuvre de le Corbusier. Poursuite possible d'un entraînement sur les nombres à virgule, la division, le quotient ou le rapport, selon le degré scolaire.
Propositions de déroulement	a) Leçon à organiser selon le modèle d'une leçon expérimentale de physique. b) Laisser du temps aux élèves, suivant leur degré scolaire pour faire les mesures et commenter les différences. Eventuellement faire chercher les mots dans le dictionnaire. c) Faire constater aux élèves, lors de la mise en commune que les rapports calculés à partir de personnes différentes sont très proches. Evoquer l'idée de proportions communes du corps humain. d) Faire apparaître la notion du rapport qui est indépendant des deux grandeurs qui le composent e) Utiliser la moyenne pour définir une valeur commune pour la classe et pour minimiser les erreurs de mesure. Discuter des causes des écarts à la moyenne.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Mesures, nombres réels (non entiers). Calculs de rapports, divisions. Notion de rapport. Calculs de moyennes. Observation de régularités
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Difficultés liées aux mesures (précision, relevé, hauteurs à mesurer perpendiculairement au sol). Si des rapports sont par trop différents demander aux élèves de vérifier les mesures. Organisation des résultats (tableaux, rapports entre les bonnes mesures) Calcul de la moyenne
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Nombres non entiers Division, quotient Notion de rapport comme nombre « indépendant » des deux grandeurs qui le composent. Notion de moyenne
Liens interdisciplinaires	Physique, arts visuels
Consolidation et développements possibles	Exercices sur les nombres décimaux ou périodiques Exercices sur les divisions Exercices sur les rapports

Nombre d'or et corps humain : la canne des bâtisseurs, le modulor de le Corbusier.

Le Corbusier, architecte du 20e siècle, a choisi d'utiliser certaines dimensions du corps humain pour dessiner des meubles et des espaces de vie. Il ne faisait que reprendre des habitudes très anciennes de définir des unités de mesure de longueur à partir du corps. Ainsi tu as sans doute entendu parler du pied ou de la coudée.

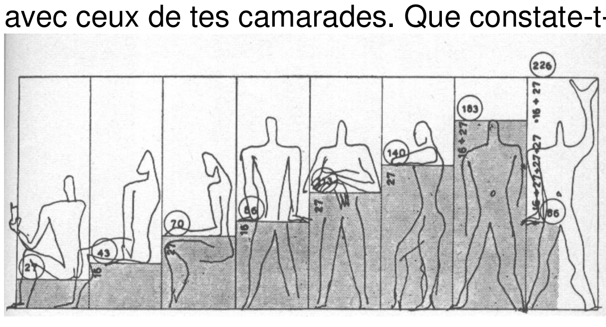
a) Mesure au demi-centimètre près les longueurs suivantes :
   - ta coudée (du coude au bout des doigts),
   - ton pied,
   - ton empan (de l'extrémité du pouce à celle du petit doigt, doigts écartés),
   - ta palme (de l'extrémité de l'index à celle du petit doigt, doigts écartés),
   - ta paume (largeur de ta main).

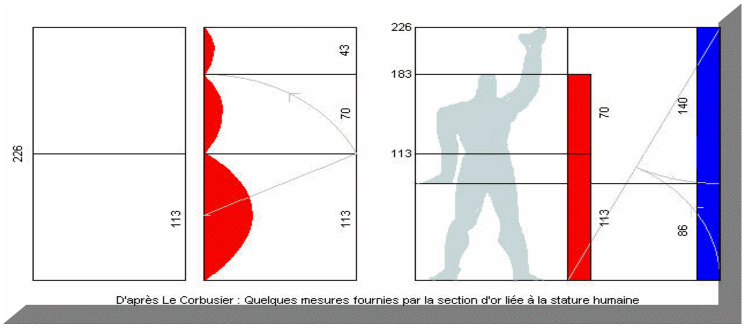


Ces différentes longueurs constituaient ce qu'on appelait la « canne des bâtisseurs » ou la « quine » car composée de 5 longueurs.
Présente les résultats de la quine dans un tableau et calcule tous les rapports entre deux mesures successives, la plus grande divisée par la plus petite. Compare ces rapports avec ceux de tes camarades. Que constate-t-on ?

b) Le Corbusier a nommé une suite de rapports calculés à partir du corps humain « le Modulor » (voir dessin). Tu vas mesurer le Modulor sur toi-même. Mesure au demi-centimètre près les longueurs suivantes
   - ta taille
   - bras croisés, la hauteur entre ton coude et le sol.
   - quand tu es assis, pieds à plat sur le sol, la hauteur entre le sol et le dessous de ton coude.
   - quand tu es assis, pieds à plat sur le sol, la hauteur entre le sol et ton genou.
   - la hauteur entre le sol et la partie la plus proéminente de ton mollet.

Présente ces résultats dans un tableau et calcule tous les rapports entre deux mesures successives, la plus grande divisée par la plus petite. Compare ces rapports avec ceux de tes camarades. Que constate-t-on ?





Le Modulor de le Corbusier

c) Certains prétendent que ces rapports tendent vers le rapport d'or, la « divine proportion » de Fibonacci (Léonard de Pise XIIe siècle) noté $\phi = (1 + \sqrt{5})/2 \cong 1{,}618$. Pour comparer les rapports trouvés au nombre d'or, comment définir une valeur de ces différents rapports pour toute la classe ? Calculez la valeur de ces différents rapports pour la classe. Lequel des rapports calculés correspond le mieux au nombre d'or ?

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Nombre d'or et corps humain : la canne des bâtisseurs, le modulor de le Corbusier.

Enjeux de l'activité

Cette activité est partiellement tirée des MERM 7/8/9, Nombres et opérations, ex 219.
Son intérêt est double :

a) d'une part travailler sur la mesure -comment prendre les mesures ? avec quel instrument de mesure ? quelle précision pour les résultats des mesures? quelle unité choisir ?
b) d'autre part introduire ou exercer le concept de rapport, qui tout en étant calculé à partir de deux grandeurs, est indépendant de celles-ci.

En effet, pour autant que les élèves soient normalement proportionnés -ce qui peut ne pas être le cas pour tous selon l'évolution de leur croissance- les rapports qu'ils vont trouver entre deux dimensions données (par exemple entre la taille et la hauteur des coudes) ne seront pas très différents d'une personne à l'autre, alors que les mesures, elles, peuvent l'être beaucoup. Il sera intéressant de faire constater cette caractéristique aux élèves, les mesures d'un élève très grand ne donneront pas lieu à des rapports nécessairement plus grands. Cette constatation peut être en contraction avec l'idée –fausse- qu'à partir de grands nombres, on trouve forcément des rapports plus grands.

On montrera par ailleurs aux élèves qu'un rapport tel celui-ci obtenu par la division de deux mesures de même unité n'a pas d'unité. Pour s'en convaincre on peut faire calculer le même rapport à partir de mesures en cm, m ou mm et constater que le résultat est le même.

Dans le cadre de cette activité on pourra aussi travailler l'estimation des quotients. Il est en effet opportun de faire faire les divisions à la calculatrice à cause des nombres obtenus par les mesures, mais on invitera les élèves à s'interroger sur la justesse du résultat par l'estimation de l'ordre de grandeur : ce rapport sera-t-il supérieur ou inférieur à 1 ? combien de fois la plus petite mesure est-elle contenue dans la plus grande ? Cette approximation devrait avoisiner 1,5 dans la plupart des cas. Il serait aussi intéressant de s'interroger sur le nombre de chiffres significatifs pertinents du résultat, mais les connaissances requises pour ce faire dépassent les connaissances d'élèves de la fin de l'EP et du CO (voir ci-dessous sur le calcul d'erreur).

Eléments de réponse

Indications de valeurs possibles (donnée ici avec une seule décimale car moyennes à partir des mesures de deux personnes)
Question a) la canne des bâtisseurs

a) coudée : pied $\cong$ 1,8
b) pied : empan $\cong$ 1,3
c) empan : palme $\cong$ 1.5
d) palme : paume $\cong$ 1,6

Question b) le modulor

a) taille : hauteur du coude depuis le sol $\cong$ 1,6
b) coude debout : coude assis $\cong$ 1,5
c) coude assis : sous le genou $\cong$ 1,5
d) sous le genou : mollet $\cong$ 1,3

Question c)

A partir des moyennes des valeurs de toute la classe, constater que certains rapports s'approchent plus du nombre d'or que d'autres (palme/paume, taille/hauteur du coude).

Rappel sur le calcul d'erreur

La précision relative d'un rapport s'obtient en additionnant les erreurs relatives des deux grandeurs en jeu. Si la mesure est prise au demi centimètre près, l'erreur absolue est toujours ± 0,25 cm, mais l'erreur relative varie selon la grandeur mesurée. Elle sera par exemple de 0,25 : 8 = 3% pour la paume et de 0,25 : 160 = 0,15% pour la taille. Pour les plus petites mesures, l'erreur relative sur le rapport peut donc s'élever à environ 5%, ce qui donne par exemple pour le rapport palme/paume 1,6 ± 0,1 , donc une valeur du rapport comprise entre 1,5 et 1,7.

Exercices de consolidation

Le rapport est un concept essentiel des mathématiques de la scolarité obligatoire. De plus c'est une notion importante de la vie sociale, avec ses corollaires de pourcentages, fractions ou proportions de. Il semble donc particulièrement approprié de saisir l'occasion de la Semaine des Mathématiques pour exercer ce concept dans différents contextes. La recherche du nombre d'or « caché » dans la nature ou l'architecture peut être un nouveau prétexte pour faire calculer des rapports de mesures (cf. texte sur le nombre d'or), mais on peut aussi faire calculer le rapport de la longueur à la largeur de plusieurs rectangles de différentes dimensions, pour constater que les rectangles de même forme sont régis par le même rapport.

En 8^e il peut être intéressant de faire découvrir π de façon similaire à partir du rapport des périmètres de disques aux diamètres correspondants de divers objets circulaires.

SEMAINE DE L'ARITHMÉTIQUE
proposition d'activité

Titre de l'activité	Qui divise qui?
Résumé de l'activité	Le but est de découvrir sur des exemples que dans la suite de Fibonacci, F_n divise F_{kn}. En particulier $2 = F_3$ divise tous les nombres de Fibonacci de la forme F_{3k} et $3 = F_4$ divise tous les nombres de Fibonacci de la forme F_{4k}. Avec une idée de preuve.
Type d'activité	Activité d'observation et de déduction avec justification.
Degrés concernés	6P-9CO
Énoncé destiné aux élèves	A partir de la suite de Fibonacci (1,1,2,3,5,...) trouver les termes qui sont pairs; puis ceux qui sont multiples de trois, multiples de cinq. Que remarquez-vous?
Matériel	Une feuille contenant l'énoncé et le début de la suite de Fibonacci.
Durée	Deux périodes
Propositions de déroulement	Laisser tout d'abord découvrir aux élèves quels nombres dans la suite de Fibonacci sont divisibles par deux. Pour faire apparaître le fait que tous les nombres de Fibonacci pairs apparaissent dans la suite à intervalle réguliers, écrire la suite de Fibonacci au tableau sous la forme F_1 F_2 F_3 F_4 F_5 F_6 F_7 F_8 F_9 F_{10} F_{11} F_{12} ... 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 ... Les nombres de Fibonacci pairs sont $F_3 = 2$; $F_6 = 8$; $F_9 = 34$; $F_{12} = 144$; on remarque que $F_3 = 2$ et que les autres nombres de Fibonacci pairs sont F_6, F_9, F_{12}, c'est-à-dire de la forme F_{3k}. Faire le même type d'observations pour $3 = F_4$, pour arriver à la conjecture : F_n divise F_{kn}, pour tout n et k entiers (évidemment pas sous cette forme). Pour démontrer que $2 = F_3$, divise F_6, F_9, utiliser la parité et la relation de Fibonacci. Une fois cela fait, indiquer aussi l'interprétation de cette preuve en terme de reste de division par 2.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Élaboration d'une conjecture, critère de divisibilité. La division euclidienne et l'arithmétique sur les restes de division.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	La difficulté principale de l'activité est de voir que la relation de divisibilité se lit sur les indices, en effet voir que 2 divise les troisième, sixième, neuvième,... éléments de la suite de Fibonacci est facile, mais que cette périodicité de longueur 3 corresponde au fait que $2 = F_3$ est plus difficile à voir.

Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Lien entre addition et parité. Lien entre addition et reste de division.
Consolidations et développements possibles	Pour les degrés plus élevés, démontrer la conjecture pour 2,3 et éventuellement pour F_n quelconque (voir activité F_n divise F_{kn}).

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Qui divise qui?
On cherche à voir quel nombre de Fibonacci divise quel autre nombre de Fibonacci.
Le premier nombre de Fibonacci différent de 1 est $F_3 = 2$.
a) Déterminer quels autres nombres dans la suite de Fibonacci sont divisibles par 2. Que remarquez-vous?
b) Faites de même pour $F_4 = 3$.

Les trente premiers termes de la suite de Fibonacci.

F_1	=	1
F_2	=	1
F_3	=	2
F_4	=	3
F_5	=	5
F_6	=	8
F_7	=	13
F_8	=	21
F_9	=	34
F_{10}	=	55
F_{11}	=	89
F_{12}	=	144
F_{13}	=	233
F_{14}	=	377
F_{15}	=	610
F_{16}	=	987
F_{17}	=	1597
F_{18}	=	2584
F_{19}	=	4181
F_{20}	=	6765
F_{21}	=	10946
F_{22}	=	17711
F_{23}	=	28657
F_{24}	=	46368
F_{25}	=	75025
F_{26}	=	121393
F_{27}	=	196418
F_{28}	=	317811
F_{29}	=	514229
F_{30}	=	832040

F_1	=	1
F_2	=	1
F_3	=	2
F_4	=	3
F_5	=	5
F_6	=	8
F_7	=	13
F_8	=	21
F_9	=	34
F_{10}	=	55
F_{11}	=	89
F_{12}	=	144
F_{13}	=	233
F_{14}	=	377
F_{15}	=	610
F_{16}	=	987
F_{17}	=	1597
F_{18}	=	2584
F_{19}	=	4181
F_{20}	=	6765
F_{21}	=	10946
F_{22}	=	17711
F_{23}	=	28657
F_{24}	=	46368
F_{25}	=	75025
F_{26}	=	121393
F_{27}	=	196418
F_{28}	=	317811
F_{29}	=	514229
F_{30}	=	832040

Les trente premiers termes de la suite de Fibonacci.

F_1	=	1
F_2	=	1
F_3	=	2
F_4	=	3
F_5	=	5
F_6	=	8
F_7	=	13
F_8	=	21
F_9	=	34
F_{10}	=	55
F_{11}	=	89
F_{12}	=	144
F_{13}	=	233
F_{14}	=	377
F_{15}	=	610
F_{16}	=	987
F_{17}	=	1597
F_{18}	=	2584
F_{19}	=	4181
F_{20}	=	6765
F_{21}	=	10946
F_{22}	=	17711
F_{23}	=	28657
F_{24}	=	46368
F_{25}	=	75025
F_{26}	=	121393
F_{27}	=	196418
F_{28}	=	317811
F_{29}	=	514229
F_{30}	=	832040

F_1	=	1
F_2	=	1
F_3	=	2
F_4	=	3
F_5	=	5
F_6	=	8
F_7	=	13
F_8	=	21
F_9	=	34
F_{10}	=	55
F_{11}	=	89
F_{12}	=	144
F_{13}	=	233
F_{14}	=	377
F_{15}	=	610
F_{16}	=	987
F_{17}	=	1597
F_{18}	=	2584
F_{19}	=	4181
F_{20}	=	6765
F_{21}	=	10946
F_{22}	=	17711
F_{23}	=	28657
F_{24}	=	46368
F_{25}	=	75025
F_{26}	=	121393
F_{27}	=	196418
F_{28}	=	317811
F_{29}	=	514229
F_{30}	=	832040

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Qui divise qui ?

Enjeux de l'activité

Cette activité permet de voir ou revoir certains critères de divisibilité, ainsi que des propriétés de restes de la division entière.

Eléments de réponse

Le nombre n est pair si et seulement si le dernier chiffre du nombre n est 0, 2, 4, 6 ou 8.
Le nombre n est multiple de trois si et seulement la somme des chiffres le composant (en base 10) est divisible par 3. Et donc en réitérant le processus si une de ces sommes vaut 3, 6 ou 9.
Exemple : 9
Pour démontrer que les nombres de Fibonacci pairs sont de la forme F_{3k}, pour k entier positif, il suffit de remarquer que la somme de deux nombres pairs est pair, la somme de deux impairs est pair et la somme d'un pair avec un impair est impair.
En partant de la relation de récurrence de Fibonacci, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, il suffit de dire que, comme est F_{3n} pair et F_{3n-1} est impair, F_{3n+1} et F_{3n+2} sont aussi impairs et donc F_{3n+3} est pair. L'exercice est à faire sur des exemples numériques (F_3, F_{3+1} et F_{3+2}, puis F_6, F_{6+1} et F_{6+2} par exemple), et pas littéralement.
Cette preuve devrait se formaliser par récurrence, mais un tel raisonnement sur les premiers termes est suffisant. Par contre cet exemple peut être utilisé, comme introduction intuitive aux preuves par récurrence.
Cette preuve peut être modifiée et utilisant la division euclidienne (et le calcul modulo) si on regarde les restes de division par 2 pour tous les éléments de la suite de Fibonacci, on obtient 1,1,0,1,1,0,... Or le reste division respecte l'addition en ce sens que si r_m est le reste de division de m par d et r_k est le reste de division de k par d, alors le reste de division de (m+k) par d est égal au reste de division de $(r_m + r_k)$ par d (mathématiquement on dit que le reste de division par n est un homomorphisme d'anneaux de Z dans Z/nZ où Z/nZ est l'anneau des classes de restes modulo n).
En faisant remarquer cette propriété de la division euclidienne aux élèves on pourra leur dire que ceci est extrêmement utile dans certains cas. C'est de là par exemple que découlent les critères de divisibilité par 3 et par 9 (et celui moins connu de critère de divisibilité par 11).
De fait pour ces critères de divisibilité, on doit aussi connaître que le reste de division du produit mk par d est égal au reste de division de $r_m r_k$ par d, ce qui peut d'ailleurs se déduire du cas de l'addition.

Grâce à la propriété que le reste de la division de m+k par d est égal au reste de division de $(r_m + r_k)$ par d ; dès que l'on retrouve deux restes consécutifs identiques à deux autres restes consécutifs, on sait que la suite des restes se répète se répète. En effet si les restes de division par un nombre N de F_n et F_{n-1} sont égaux à A et à B respectivement, alors le reste de division de $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ est égal au reste de division de A+B par N. Si donc les restes des divisions de F_j et F_{j-1} sont égaux respectivement à A et à B, alors le reste de la division de $F_{j+1} = F_j + F_{j-1}$ est aussi égal au reste de division de A+B par N. Autrement dit la relation de Fibonacci reste valable pour les restes de division par N.
En répétant cet argument, de proche en proche, on montre que la suite est périodique.
Dans le cas de $2 = F_3$, la suite des restes est 1,1,0,1,1,0,… on voit une répétition juste après le premier zéro, les zéros dans la suite des restes apparaissent donc bien pour les indices qui sont des multiples de 3. Cette approche permet de justifier le fait que les seuls F_{3n} sont pairs. Elle permet aussi de démontrer que les seuls multiples de 3 sont les F_{4n}. En effet, il suffit de calculer les restes de divisions par 3 des éléments de la suite de Fibonacci pour trouver 1,1,2,0,2,2,1,0,1,1,2,0,... Il faut attendre le deuxième

zéro pour voir une répétition apparaître.
Il est intéressant de remarquer que le calcul de la suite des restes de division par F_n des éléments de la suite de Fibonacci permet toujours de trouver une périodicité et donc, pour tout n fixé, permet de démontrer en un nombre fini de calculs que F_n divise F_{kn}.
En effet comme il n'y a que F_n restes possibles après une division par F_n, il n'y aussi qu'un nombre fini de pairs de restes consécutifs. Comme dans la suite des restes, il y a une infinité de paires de restes consécutifs, il y aura nécessairement répétition après un certain temps.

Exercices de consolidation

Comme la plupart des calculs demandés sont connus, l'activité en elle-même peut être vue comme de la consolidation de notions préalablement vues en classe.
Par contre on peut insister sur le fait que les critères de divisibilité par 3 et par 9 disent qu'un nombre écrit en base 10 est divisible par 3 (respectivement par 9) si la somme de ses chiffres, dans l'écriture décimale est divisible par 3 (resp. par 9).
Exemple : Pour savoir si 346287 est divisible par 3 (resp. par 9) on calcule
3+4+6+2+8+7 = 30 soit on remarque que ce nombre est divisible par 3, mais pas par 9, soit on recommence le processus et on obtient 3 + 0 = 3 qui est bien divisible par 3, mais pas par 9.
L'explication de ces critères vient du fait que le reste de division de 10 (de 100, de 1000,…) par 3 est toujours 1. Donc si un nombre N admet comme écriture décimale la suite des chiffres $a_k a_{k-1} \dots a_1 a_0$, on peut écrire $N = a_k\, 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1\, 10 + a_0$,
Le reste de division de N par 3 est donc à la somme des restes de division par 3 de chaque terme $a_i\, 10^i$; or comme le reste de la division de 10^i par vaut toujours 1, le reste de la division de $a_i\, 10^i$ par 3 est égal au reste de division de a_i par 3 (règle du produit ci-dessus).
Cette explication est exactement la même pour le reste de la division par 9.
Le critère de division par 11 dit que N est divisible par 11 si la somme alternée de ses chiffres l'est aussi. Ceci vient du fait que -1 et 10 ont même reste quand on les divise par 11.
Ainsi $N = a_k\, 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \dots + a_1\, 10 + a_0$ est divisible par 11 si et seulement si
$a_k\, (-1)^k + a_{k-1}(-1)^{k-1} + \dots - a_1 + a_0$ est divisible par 11.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	Spirale avec Cabri
Résumé de l'activité	Activité avec Cabri-géomètre amenant à tracer la spirale.
Type d'activité	Construction avec le logiciel Cabri-géomètre ou un équivalent
Degrés concernés	CO-PO
Enoncé destiné aux élèves	Activité 1 (deux tiers des élèves)
Matériel	Dessine avec le logiciel un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder. [Note ses dimensions.]
Durée	Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible. Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle. [Note les dimensions de ces deux figures.]
Propositions de déroulement	En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux [dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents].
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Activité 2 (un tiers des élèves)
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Dessine avec le logiciel un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm.
Développements possibles	Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible. Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle. [Note les dimensions de ces deux figures.]
Liens interdisciplinaires	En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enoncé ***Activité 1 Spirale avec Cabri-géomètre***

Dessine avec le logiciel un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder.
[Mesure et note ses dimensions.]

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents.]

Enoncé ***Activité 2 Spirale avec Cabri-géomètre***

Dessine avec le logiciel un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm.

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents.]

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Spirales avec le logiciel cabri ou construction à la règle et au compas.

Enjeux de l'activité

Activité 1

Cette activité vise :

- à recenser les dimensions jugées ”idéales” par les élèves qui traitent l'activité 1,
- à constater que, selon les dimensions choisies, la tâche à effectuer ne permet pas de tracer une spirale.

Activité 2

Pour aboutir au résultat attendu, cette activité demande de la précision (mesure et compas). Elle a pour principal objectif de servir de référence dans le débat qui suivra.

Débat

Un débat sur le sens du beau et de l'harmonieux pourrait initier l'approche mathématique du rapport d'or. (*Si l'enseignant se sent à l'aise sur le sujet, une présentation des critères mythiques qui ont prévalu à l'élaboration de nombreuses œuvres d'art sera certainement une digression qui servira à motiver encore mieux les élèves dans la suite de la phase d'institutionnalisation.)*

Dans un deuxième temps, il est nécessaire de faire émerger, qu'en partant de ”l'intérieur”, si l'on veut construire une spirale avec des quarts de cercle, une des constructions possibles[1] (*celle qui se rapproche le plus de la spirale logarithmique*) suit la règle de construction suivante :

Pour : R_1, rayon du premier quart de cercle, R_2, rayon du deuxième quart de cercle, R_3, rayon du troisième quart de cercle, …, R_n , rayon du n-ième quart de cercle.

On a :

$R_1 = R_2$ et $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$

(C'est-à-dire : $R_3 = R_2 + R_1$; $R_4 = R_3 + R_2$; …)

Par la suite, l'enseignant montrera que le rapport entre les côtés du rectangle donné est proche du nombre d'or (rapport d'or) :

$$\frac{27,5}{17} \cong 1,61765 \quad \text{et} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803$$

Il pourra également comparer les différents rapports ”choisis” par les élèves de l'activité 1, voire le rapport moyen, avec le nombre ϕ.

Enjeux annexes

Activité 1 : Entraîner le maniement de la règle et du compas.

Activité 2 : Entraîner les constructions avec Cabi-géomètre.

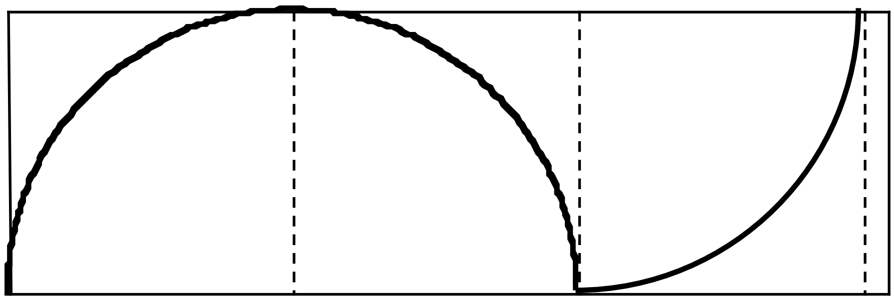
Activité 1&2 : Construction d'un tableau des valeurs et calcul de rapports.

[1] Autre construction possible à la fin de ce document.

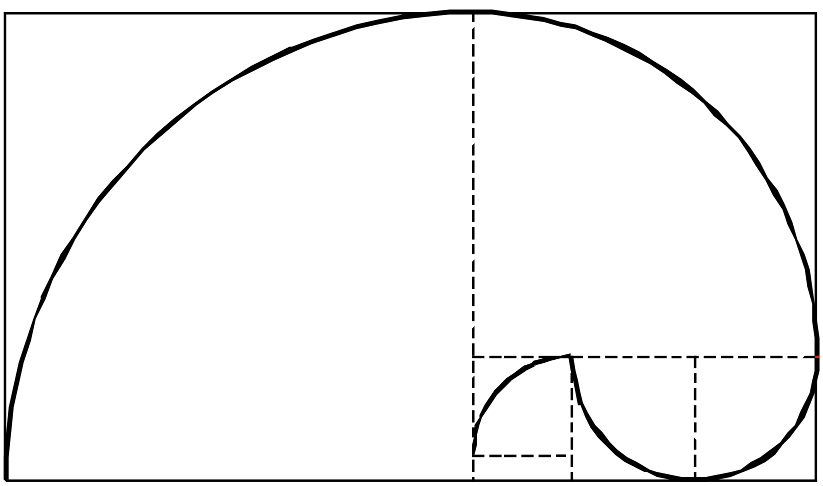
Eléments de réponse : constructions possibles.

Activité 1

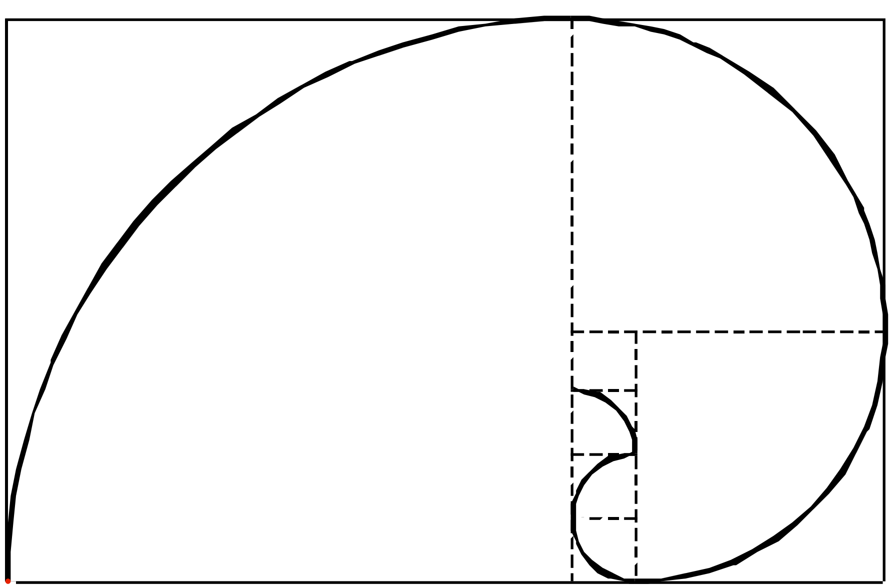
Cas : rapport longueur / hauteur >> 1,618



Cas : rapport longueur / hauteur > 1,618



Cas : rapport longueur / hauteur < 1,618



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	Spirale
Résumé de l'activité	En partageant la classe en deux groupes inégaux découverte de la spirale.
Type d'activité	Construction à la règle et au compas.
Degrés concernés	5P-PO
Enoncé destiné aux élèves	***Activité 1 (deux tiers des élèves)*** Dessine avec le logiciel un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder. [Note ses dimensions.] Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré qui a deux sommets communs avec le rectangle. [Note les dimensions de ces deux figures.] En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré. Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux [dans la mesure du possible, trace le nouveau carré de manière à ce que le quart de cercle qui sera tracé à l'intérieur de ce carré prolonge le(s) quart(s) de cercles précédents. ***Activité 2 (un tiers des élèves)*** Dessine avec le logiciel un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm. Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible. Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle. [Note les dimensions de ces deux figures.] En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré. Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux [dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents].
Matériel	Règle et compas. (Eventuellement, équerre.)
Durée	90 min

Propositions de déroulement	Demander aux élèves d'établir, pour chacune des étapes, un tableau avec : - les dimensions du rectangle, - les dimensions du carré, - l'aire du rectangle et celle du carré, - le rapport entre l'aire du rectangle et celle du carré. Comparer les rapports obtenus et faire le lien avec le rapport d'or. Parler de la suite de Fibonacci.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Mesurer : Reporter de longueurs. Tracer des perpendiculaires. Reporter des valeurs dans un tableau. Calcul d'aire. Suites numériques. Construction et raisonnement par récurrence.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Selon les dimensions choisies pour l'activité 1, il y a un risque que celles-ci induisent une fin rapide des itérations possibles (par exemple si la longueur du rectangle est le double de la largeur). Dans ce cas, demander à l'élève de recommencer avec d'autres dimensions. Les deux tâches sont complémentaires, l'activité 1 pour enrichir le débat par des résultats variés et l'activité 2 pour introduire la phase d'institutionnalisation.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Figures géométriques. Rapports. Limites.
Développements possibles	Recherche du rapport entre deux termes successifs (rapport d'or). Spirale de Fibonacci. Calcul de la limite des rapports. Recherche de la forme algébrique de la suite de Fibonacci.
Liens interdisciplinaires	Histoire des sciences et des arts. Sciences naturelles.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enoncé *Activité 1 Spirale*

Sur une feuille A4, dessine un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder.
[Mesure et note ses dimensions.]

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, tracer le nouveau carré de manière à pouvoir prolonger les quarts de cercles précédents.]

Enoncé *Activité 2 Spirale*

Dessine un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm.

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, tracer le nouveau carré de manière à pouvoir prolonger les quarts de cercles précédents.]

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enoncé ***Activité 1 Spirale***

Sur une feuille A4, dessine un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder.
[Mesure et note ses dimensions.]

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents.]

Enoncé ***Activité 2 Spirale***

Dessine un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm.

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents.]

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Spirales avec le logiciel cabri ou construction à la règle et au compas.

Enjeux de l'activité

Activité 1

Cette activité vise :

- à recenser les dimensions jugées "idéales" par les élèves qui traitent l'activité 1,
- à constater que, selon les dimensions choisies, la tâche à effectuer ne permet pas de tracer une spirale.

Activité 2

Pour aboutir au résultat attendu, cette activité demande de la précision (mesure et compas). Elle a pour principal objectif de servir de référence dans le débat qui suivra.

Débat

Un débat sur le sens du beau et de l'harmonieux pourrait initier l'approche mathématique du rapport d'or. (*Si l'enseignant se sent à l'aise sur le sujet, une présentation des critères mythiques qui ont prévalu à l'élaboration de nombreuses œuvres d'art sera certainement une digression qui servira à motiver encore mieux les élèves dans la suite de la phase d'institutionnalisation.)*

Dans un deuxième temps, il est nécessaire de faire émerger, qu'en partant de "l'intérieur", si l'on veut construire une spirale avec des quarts de cercle, une des constructions possibles[1] (*celle qui se rapproche le plus de la spirale logarithmique*) suit la règle de construction suivante :

Pour : R_1, rayon du premier quart de cercle, R_2, rayon du deuxième quart de cercle,
R_3, rayon du troisième quart de cercle, …, R_n , rayon du n-ième quart de cercle.

On a :

$R_1 = R_2$ et $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$

(C'est-à-dire : $R_3 = R_2 + R_1$; $R_4 = R_3 + R_2$; …)

Par la suite, l'enseignant montrera que le rapport entre les côtés du rectangle donné est proche du nombre d'or (rapport d'or) :

$$\frac{27{,}5}{17} \cong 1{,}61765 \quad \text{et} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803$$

Il pourra également comparer les différents rapports "choisis" par les élèves de l'activité 1, voire le rapport moyen, avec le nombre ϕ.

Enjeux annexes

Activité 1 : Entraîner le maniement de la règle et du compas.

Activité 2 : Entraîner les constructions avec Cabi-géomètre.

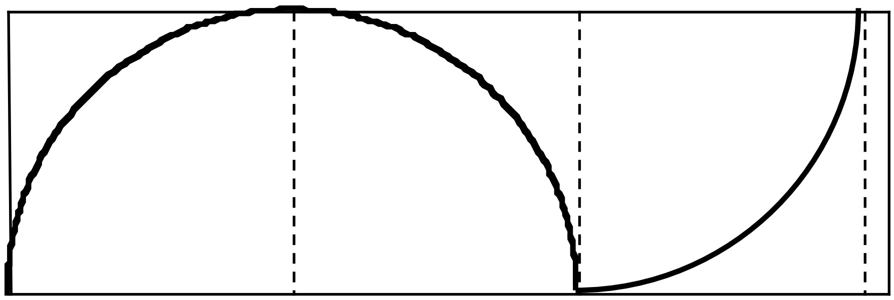
Activité 1&2 : Construction d'un tableau des valeurs et calcul de rapports.

[1] Autre construction possible à la fin de ce document.

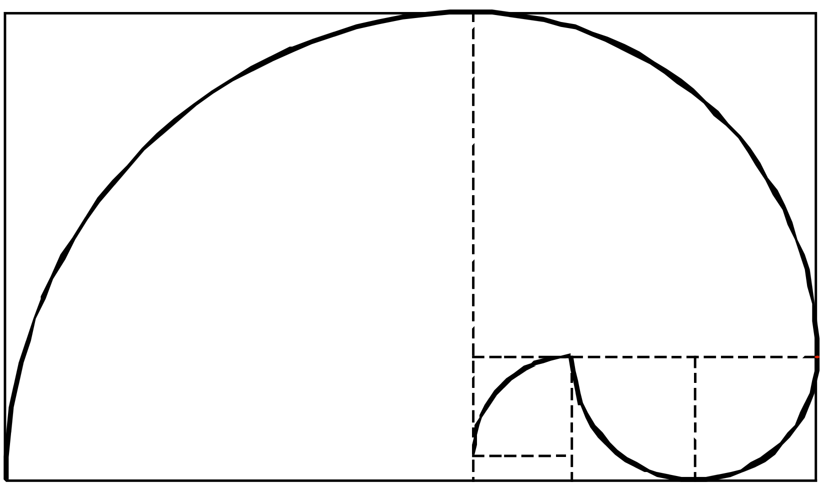
Eléments de réponse : constructions possibles.

Activité 1

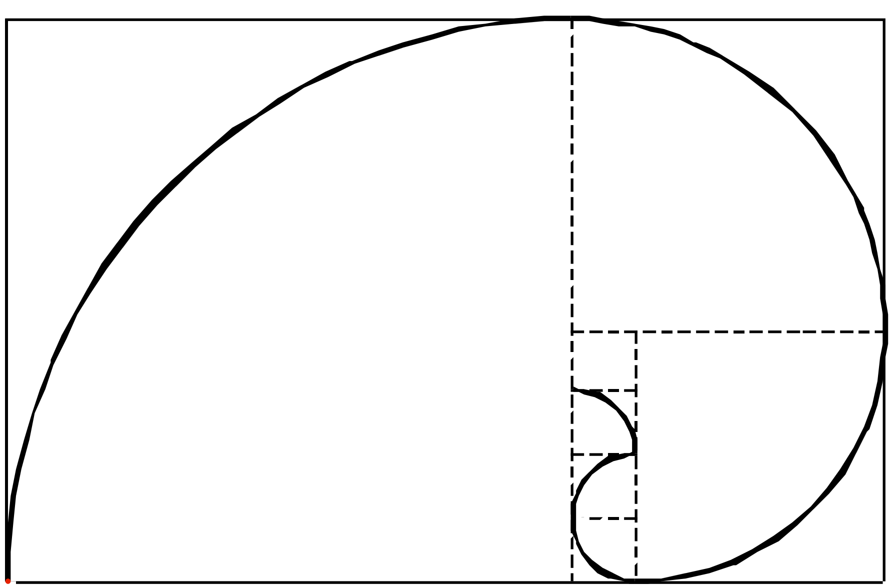
Cas : rapport longueur / hauteur >> 1,618



Cas : rapport longueur / hauteur > 1,618



Cas : rapport longueur / hauteur < 1,618



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	**Découverte de la suite de Fibonacci** ou *cinq activités à traiter simultanément* : **les billes, les escaliers, les étages peints, les faux-bourdons, les lapins** (ce dernier étant le problème posé par Fibonacci il y a environ 800 ans).
Résumé de l'activité	Ces 5 activités, qu'il est conseillé de faire résoudre en classe en parallèle par 5 groupes d'élèves, font apparaître la suite de Fibonacci à partir de 5 situations différentes, lui conférant ainsi son caractère magique. Elles sont aussi une introduction aux activités portant plus spécifiquement sur les propriétés de la suite de Fibonacci, justifiant ainsi l'étude de cette suite.
Type d'activité	Activité initiale de découverte.
Degrés concernés	5P – PO
Enoncés destiné aux élèves	1. <u>Les billes</u> Douze élèves attendent devant la classe en file indienne. Un grand sac de billes se trouve à l'entrée de la classe. Le premier élève reçoit une bille. Au moment d'entrer en classe, chaque élève prend dans le sac des billes pour en donner autant qu'il en possède à ses deux suivants. Cela signifie que le premier élève donne une bille à chacun des deux suivants. Le $2^{ème}$, qui en a maintenant une, en donne donc une au $3^{ème}$ et au $4^{ème}$. Le $3^{ème}$, qui en a deux, en donne deux au $4^{ème}$ et deux au $5^{ème}$, etc. Quel sera le nombre de billes reçues par chacun des élèves ? En particulier par le $1^{ère}$, le $2^{ème}$, le $3^{ème}$, le $4^{ème}$, le $5^{ème}$, le $6^{ème}$ ……… et le dernier ?
	2. <u>Les escaliers</u> En montant des escaliers je peux monter : - une marche à la fois, - deux marches à la fois. En devant obligatoirement poser le pied sur la première marche, de combien de façons puis-je monter un escalier composé d'une marche, de deux marches, de trois marches, de quatre marches, de cinq marches, ……, de douze marches ?

	3. <u>Les étages peints</u> Dans ma ville, il y a une rue spéciale dans laquelle - le 1^{er} immeuble a 1 étage, - le 2^{ème} immeuble a 2 étages, - le 3^{ème} immeuble a 3 étages et ainsi de suite. Le maire décide de faire repeindre, étage par étage, les immeubles de cette rue en jaune et en bleu en respectant les deux conditions ci-dessous : • Le 1^{er} étage de chaque immeuble doit être bleu. • On ne doit pas avoir 2 étages bleus qui se suivent. De combien de manières différentes peut-on peindre le 1^{er}, le 2^{ème}, le 3^{ème}, le 4^{ème} , le 5^{ème}., le 6^{ème} ………, le 12^{ème} immeuble ?
	4. <u>Les faux-bourdons</u> ***Indication*** **La reproduction chez les abeilles** La population des abeilles comporte trois sortes d'individus : - La reine, seule femelle féconde. - Les faux-bourdons, qui sont les mâles. - Les ouvrières, qui sont des femelles stériles. La reine s'accouple au printemps avec des faux-bourdons et a ensuite la faculté de pondre deux sortes d'œufs : - Des œufs fécondés d'où naîtront des femelles, ouvrières ou reine - Des œufs non fécondés d'où naîtront des faux-bourdons. On peut en conclure que les abeilles femelles ont deux parents, alors que les faux-bourdons n'ont pas de père ! ***Question*** Avec les informations ci-dessus, trouver le nombre maximum des ascendants d'un faux-bourdon à la 1^{ère}, 2^{ème}, 3^{ème}, 4^{ème}, 5^{ème} et 6^{ème} , ……… et 12^{ème} génération ?
	5. <u>Les lapins</u> ***Énoncé historique*** " Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ? " ***Énoncé actualisé*** Sachant que, dès que les deux lapins d'un couple sont âgés de deux mois, ce couple engendre un nouveau couple de lapins chaque mois, trouver combien il y aura de couples de lapins au bout d'une année. ***Question*** En partant d'un couple né début janvier, déterminer le nombre de couples de lapins qu'il y aura en janvier, février, mars, avril, mai, juin, …… et décembre.

Matériel	Des billes (ou des jetons) en nombre suffisant (environ 400) ; papier, crayons de couleurs différentes, (éventuellement tableau des escaliers annexé et tableau des immeubles annexé)
Durée	En 5P-6P, 2x45' ; après :45'
Proposition de déroulement	Il est conseillé d'utiliser ces 5 activités en simultané. S'arranger pour que chaque activité soit traitée par un nombre d'élèves le plus égal possible. 1. <u>Les billes</u> Travail individuel ou à deux. Vérifier la compréhension de l'énoncé. Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de billes reçues par chacun des élèves. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de billes par la méthode choisie pour les six premiers élèves ou en remplissant un tableau. Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.
	2. <u>Les escaliers</u> Travail individuel ou à deux. Eventuellement, donner aux élèves des feuilles avec les escaliers à monter. Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de manières de monter des escaliers de six à douze marches sans représentation. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de manières par la méthode choisie pour les six premiers escaliers ou en remplissant un tableau. Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre le nombre de marches des escaliers et le nombre de manières différentes de les monter. Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.
	3. <u>Les étages peints</u> Travail individuel ou à deux. Eventuellement, donner aux élèves des feuilles avec des immeubles à colorier Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de couleurs pour les immeubles de 6 à 12 étages sans coloriage. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de couleurs par coloriage ou en remplissant un

<table>
<tr><td></td><td>tableau.

Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre le nombre d’étages et le nombre de manières différentes de peindre l’immeuble.

Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.</td></tr>
<tr><td></td><td>4. <u>Les faux-bourdons</u>

Travail individuel ou à deux.

Proposer aux élèves de dessiner l’arbre généalogique d’un faux-bourdon.

Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre d’ascendants entre la $6^{\text{ème}}$ et $12^{\text{ème}}$ génération sans arbre ou sans dessin. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre d’ascendants avec l’arbre généalogique ou en remplissant un tableau.

Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre la génération et nombre d’ancêtres.

Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.</td></tr>
<tr><td></td><td>5. <u>Les lapins</u>

Travail individuel ou à deux.
Vérifier la compréhension de l’énoncé historique.

Proposer aux élèves d’illustrer le problème en représentant les couples de lapins non matures (âgés d’un mois) en bleu et les matures (âgés de plus d’un mois) en rouge dans un arbre de classement. [On peut également suggérer aux élèves d’effectuer l’arbre de classement avec les lettres ”N” et ”M”.]

Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre le mois de l’année et le nombre de lapins pour les six premiers mois de l’année.

Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de lapins pour les mois de juillet à décembre sans l’arbre de classement.
Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de couples de lapins en fin d’année avec l’arbre ou le tableau.

Faire le lien avec les autres recherches, présenter la suite de Fibonacci et replacer ce problème dans son contexte historique.</td></tr>
<tr><td>Références aux contenus d'enseignement, plans</td><td>Arbres de classement. (5P-6P)
Représentations tabulaires. (5P-6P)</td></tr>
</table>

d'études et moyens d'enseignement	Suites numériques. (CO - PO) Construction et raisonnement par récurrence. (5P – PO) Calcul littéral et résolution d'équation. (CO – PO)
Analyse préalable de l'activité	Les cinq activités sont complémentaires. Aboutissant toutes à la même suite, la suite de Fibonacci, le côté mystérieux de ce constat devrait induire un intérêt des élèves pour l'étude des particularités de cette suite.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Récurrence. Suites numériques Fonction dans **N**
Développements possibles	Recherche du rapport entre deux termes successifs (rapport d'or). Calcul de la limite de ce rapport. Recherche de la forme algébrique (Binet) des termes de la suite de Fibonacci.
Liens interdisciplinaires	Histoire des sciences et des arts. Sciences naturelles.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Découverte de la suite de Fibonacci

Enoncé *Activité 1 : Les billes*

Douze élèves attendent devant la classe en file indienne.
Un grand sac de billes se trouve à l'entrée de la classe.
Le premier élève reçoit une bille.
Au moment d'entrer en classe, chaque élève prend dans le sac des billes pour en donner autant qu'il en possède à ses deux suivants.
Cela signifie que le premier élève donne une bille à chacun des deux suivants. Le 2ème, qui en a maintenant une, en donne donc une au 3ème et au 4ème. Le 3ème, qui en a deux, en donne deux au 4ème et deux au 5ème, etc. Quel sera le nombre de billes reçues par chacun des élèves ? En particulier par le 1ère, le 2ème, le 3ème, le 4ème, le 5ème, le 6ème ……… et le dernier ?

Enoncé *Activité 2 : Les escaliers*

En montant des escaliers je peux monter :
- une marche à la fois,
- deux marches à la fois.

En devant obligatoirement poser le pied sur la première marche, de combien de façons puis-je monter un escalier composé d'une marche, de deux marches, de trois marches, de quatre marches, de cinq marches, ……, de douze marches ?

Enoncé *Activité 3 : Les étages peints.*

Dans ma ville, il y a une rue spéciale dans laquelle
- le 1er immeuble a 1 étage,
- le 2ème immeuble a 2 étages,
- le 3ème immeuble a 3 étages et ainsi de suite.

Le maire décide de faire repeindre, étage par étage, les immeubles de cette rue en jaune et en bleu en respectant les deux conditions ci-dessous :

- Le 1er étage de chaque immeuble doit être bleu.
- On ne doit pas avoir 2 étages bleus qui se suivent.

De combien de manières différentes peut-on peindre le 1er, le 2ème, le 3ème, le 4ème, le 5ème, le 6ème , ………, le 12ème immeuble ?

Enoncé *Activité 4 : Les faux-bourdons*

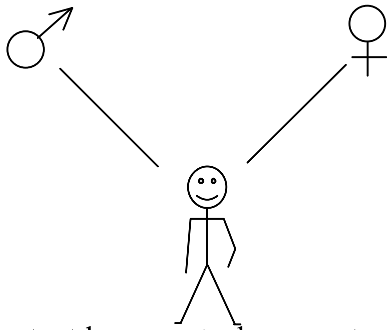
Indications

L'arbre généalogique

Un arbre généalogique ascendant représente tous les ancêtres d'un individu.
On place cet individu au bas de la feuille, et on dessine les deux branches qui le relient à ses parents. Les parents sont représentés selon leur sexe :

pour le père ♂

pour la mère ♀



On continue l'arbre en représentant les parents des parents, et ainsi de suite.
(Toutes les personnes d'une même génération sont dessinées au même niveau).

La reproduction chez les abeilles

La population des abeilles comporte trois sortes d'individus :
- La reine, seule femelle féconde.
- Les faux-bourdons, qui sont les mâles.
- Les ouvrières, qui sont des femelles stériles.

La reine s'accouple au printemps avec des faux-bourdons et a ensuite la faculté de pondre deux sortes d'œufs :
- Des œufs fécondés d'où naîtront des femelles, reine ou ouvrières.
- Des œufs non fécondés d'où naîtront des faux-bourdons.

On peut en conclure que les abeilles femelles ont deux parents, alors que les faux-bourdons n'ont pas de père !

Question

Avec les informations ci-dessus, trouver le nombre maximum des ascendants d'un faux-bourdon à la 1$^{\text{ère}}$, 2$^{\text{ème}}$, 3$^{\text{ème}}$, 4$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$, ……… et 12$^{\text{ème}}$ génération ?
Indication
Le dessin de l'arbre généalogique peut aider à répondre aux questions précédentes.

Enoncé *Activité 5 : Les lapins de Fibonacci*

Énoncé du XII^{e} Siècle

> *" Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ? "*

Énoncé actualisé

Si, dès que les deux lapins d'un couple sont âgés de deux mois, ce couple engendre chaque mois un nouveau couple de lapins, trouver combien il y aura de couples de lapins au bout d'une année.

Indication : en partant d'un couple né début janvier, déterminer le nombre de couples de lapins qu'il y aura en janvier, février, mars, avril, mai, juin, …… et décembre.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Découverte de la suite de Fibonacci ou *cinq activités à traiter simultanément :* les billes, les escaliers, les étages peints, les faux-bourdons, les lapins.

Enjeux de l'activité

Aboutissant toutes à la même suite, la suite de Fibonacci, le côté mystérieux de ce constat devrait induire un intérêt des élèves pour l'étude des particularités de cette suite.

Pour chacun des problèmes, la recherche des termes de la "suite solution" demande la compréhension d'un énoncé qui présente une situation peu commune et son appropriation (modélisation) par l'élève.

Pour son appropriation, s'il est naturel de commencer par des illustrations (dessins, schémas, arbres, tableaux, …), à partir du $5^{ème}$, $6^{ème}$ ou $7^{ème}$ terme, l'objectif est d'amener l'élève vers un raisonnement itératif et la recherche d'une règle de calcul récurrente.

Le côté mystérieux d'un résultat identique pour chacune des cinq situations, situations qui semblent, a priori, n'avoir rien en commun, devrait permettre à l'enseignant de présenter différents exemples dans lesquels la suite de Fibonacci (ou la spirale liée) apparaissent.

Eléments de réponse et indications pour ces problèmes.

Les billes

E1 Le 1^{er} élève reçoit une bille,
il en a une et en donne donc une au $2^{ème}$ et au $3^{ème}$.

E2 Le $2^{ème}$ élève a reçu une bille du 1^{er},
il en a une et en donne donc une au $3^{ème}$ et au $4^{ème}$.

E3 Le $3^{ème}$ élève a reçu une bille du 1^{er} et une du $2^{ème}$,
il en a deux et en donne donc deux au $4^{ème}$ et au $5^{ème}$.

E4 Le $4^{ème}$ élève a reçu une bille du 2^{er} et deux du $3^{ème}$,
il en a trois et en donne donc trois au $5^{ème}$ et au $6^{ème}$.

E5 Le $5^{ème}$ élève a reçu deux billes du 3^{er} et trois du $4^{ème}$,
il en a cinq et en donne donc cinq au $6^{ème}$ et au $7^{ème}$.

E6 Le $6^{ème}$ élève a reçu trois billes du 4^{er} et cinq du $5^{ème}$,
il en a huit et en donne donc trois au $7^{ème}$ et au $8^{ème}$.

En remarquant que chaque terme est égal à la somme des deux précédents, on peut calculer :

E7 E7 = E6 + E5 = 8 + 5 = 13

E8 E8 = E7 + E6 = 13 + 8 = 21

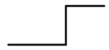
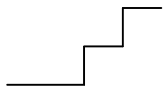
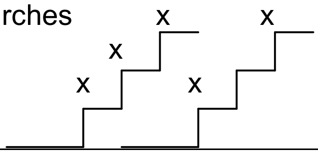
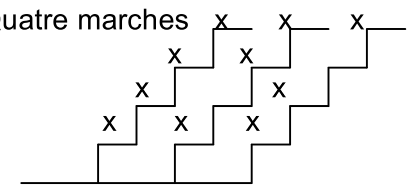
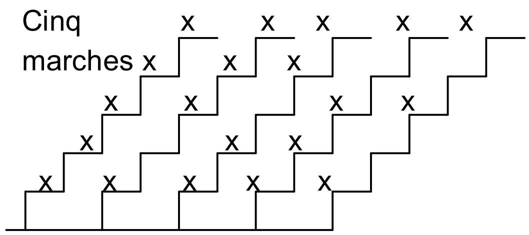
E9 E9 = E8 + E7 = 13 + 21 = 34

E10 E10 = E9 + E8 = 21 + 34 = 55

E11 E11 = E10 + E9 = 34 + 55 = 89

E12 E12 = E11 + E10 = 89 + 55 = 144

Les escaliers

Une seule marche 	E1 Il n'y a qu'**une** seule manière de monter un escalier d'une seule marche.
Deux marches 	E2 S'il faut poser le pied sur la première marche, il n'y a qu'**une** seule manière de monter un escalier de deux marches.
Trois marches 	E3 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **deux** manières de monter un escalier de trois marches. M1-M2-M3 ou M1-M3
Quatre marches 	E4 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **trois** manières de monter un escalier de deux marches. M1-M2-M3-M4 ou M1-M3-M4 ou M1-M2-M4
Cinq marches 	E5 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **cinq** manières de monter un escalier de deux marches. M1-M2-M3-M4-M5 ou M1-M3-M4-M5 ou M1-M2-M4-M5 ou M1-M2-M3-M5 ou M1-M3-M5

Six marches

1. L'illustration avec des marches devenant compliquée, si l'on veut continuer à résoudre ce problème par observation, on suggère de changer la modalité de représentation et de passer par une illustration des marches par un quadrillage.

   Exemple :

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
1[èr] possibilité	x	x	x	x	x	x
2[ème] possibilité	x		x	x	x	x
3[ème] possibilité	x	x		x	x	x
4[ème] possibilité	x	x	x		x	x
5[ème] possibilité	x	x	x	x		x
6[ème] possibilité	x		x		x	x
7[ème] possibilité	x	x		x		x
8[ème] possibilité	x		x	x		x

2. En étant un peu observateur, on peut remarquer que pour monter cinq marches on a comme alternative de poser le pied sur la quatrième marche puis de monter d'une marche ou de ne pas poser le pied sur la quatrième marche (le poser sur la troisième) puis de monter de deux marches à la fois.
On a donc obtenu la liste des manières de monter cinq marches en ajoutant un "M5" aux listes de trois et quatre marches.

Pour celle de six marches, on peut, en partant des deux précédentes, écrire

Cinq marches et "M6" : M1-M2-M3-M4-M5-M6 ou M1-M3-M4-M5-M6 ou M1-M2-M4-M5-M6 ou M1-M2-M3-M5-M6 ou M1-M3-M5-M6 ou

Quatre marches et "M6" : M1-M2-M3-M4-M6 ou M1-M3-M4-M6 ou M1-M2-M4-M6

On a donc :

E6 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **huit** manières de monter un escalier de six marches.

On voit alors que chaque terme est égal à la somme des deux précédents et l'on calcule directement les termes suivant en posant :

E7 E7 = E6 + E5 = 8 + 5 = 13

E8 E8 = E7 + E6 = 13 + 8 = 21

E9 E9 = E8 + E7 = 13 + 21 = 34

E10 E10 = E9 + E8 = 21 + 34 = 55

E11 E11 = E10 + E9 = 34 + 55 = 89

E12 E12 = E11 + E10 = 89 + 55 = 144

Les étages peints

E1 Le 1er étage doit être bleu, il n'y a donc qu'**une** manière de peindre un immeuble d'un étage.

E2 Le 1er étage doit être bleu et le second ne pouvant pas être bleu, il n'y a qu'**une** manière de peindre un immeuble de deux étages.

E3 Il y a **deux** manières de peindre un immeuble de trois étages.

3ème étage	J	B
2ème étage	J	J
1er étage	B	B

E4 Il y a **trois** manières de peindre un immeuble de quatre étages.

4ème étage	J	B	J
3ème étage	J	J	B
2ème étage	J	J	J
1er étage	B	B	B

E5 Il y a **cinq** manières de peindre un immeuble de cinq étages.

5ème étage	B	J	J	B	J
4ème étage	J	B	J	J	J
3ème étage	B	J	B	J	J
2ème étage	J	J	J	J	J
1er étage	B	B	B	B	B

E6 Il y a **huit** manières de peindre un immeuble de six étages.

6ème étage	J	J	J	J	B	J	B	B
5ème étage	J	J	J	B	J	B	J	J
4ème étage	J	J	B	J	J	J	J	B
3ème étage	J	B	J	J	J	B	B	J
2ème étage	J	J	J	J	J	J	J	J
1er étage	B	B	B	B	B	B	B	B

On voit alors que chaque terme est égal à la somme des deux précédents et l'on calcule directement les termes suivant en posant :

E7 E7 = E6 + E5 = 8 + 5 = 13

E8 E8 = E7 + E6 = 13 + 8 = 21

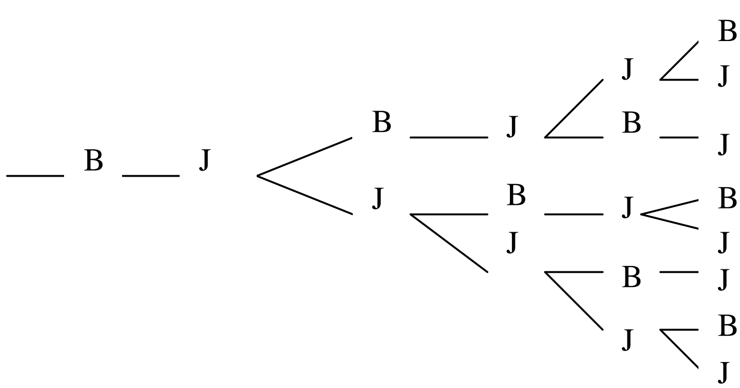
E9 E9 = E8 + E7 = 13 + 21 = 34

E10 E10 = E9 + E8 = 21 + 34 = 55

E11 E11 = E10 + E9 = 34 + 55 = 89

E12 E12 = E11 + E10 = 89 + 55 = 144

Autre présentation : arbre de classement



Suite : 1 1 2 3 5 8

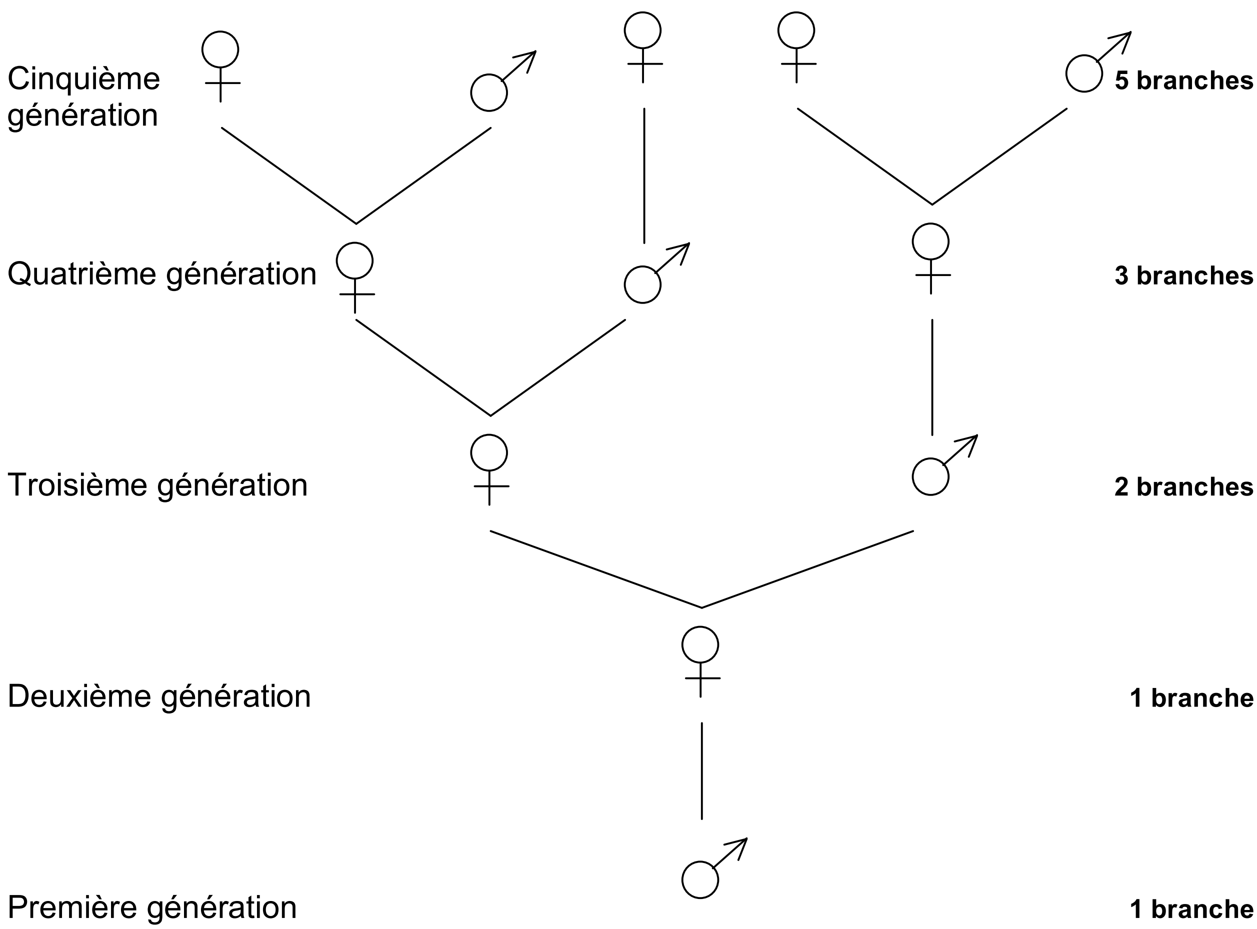
Les faux-bourdons

A1 L'arbre généalogique ne contient qu'un individu : « le faux-bourdon ».
Il a donc **une** seule branche.

A2 Le faux-bourdon n'ayant qu'une mère : « une reine », l'arbre généalogique n'a toujours qu'**une** seule branche.

A3 La reine ayant un père : « un faux-bourdon » et une mère : « une reine », l'arbre généalogique a maintenant **deux** branches.

Dès que l'on a compris ce mode de procréation (chaque faux-bourdon [mâle] a un ascendant et chaque reine [femelle] a deux ascendants directs), on peut établir l'arbre généalogique ci-dessous :



En observant l'arbre ci-dessus, voire en le complétant encore pour quelques-unes des générations précédentes, on constate que le nombre de branches pour une génération fixée est égal à la somme de branches des deux générations précédentes.
C'est-à-dire que : $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$

On a alors la suite :

$A_1 = 1$; $A_2 = 1$; $A_3 = 2$; $A_4 = 3$; $A_5 = 5$; $A_6 = 8$; $A_7 = 13$; $A_8 = 21$; $A_9 = 34$; $A_{10} = 55$; $A_{11} = 89$; $A_{12} = 144$

Remarque : ce problème est fortement simplifié par rapport à la réalité. En situation réelle, certains individus de ce tableau peuvent être le même, ce qui implique que le tableau donne un nombre maximum d'ascendants.

De plus, un faux bourdon est considéré du point de vue génétique comme le frère de la reine qui l'a pondu.

Les lapins

L1 Naissance du premier couple de lapins. On a donc **un** couple de lapins.

L2 Le premier couple de lapins a un mois, il ne peut donc pas engendrer de nouveau couple de lapins. On a toujours **un** couple de lapins.

L3 Le premier couple de lapins a deux mois, il ne peut alors engendrer un nouveau couple de lapins. On a maintenant **deux** couples de lapins.

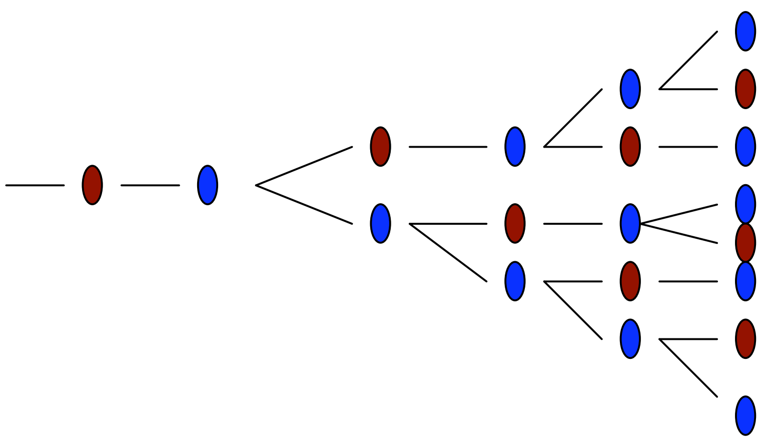
L4 Le premier couple de lapins a trois mois, il peut alors engendrer un nouveau couple de lapins, par contre le deuxième n'a qu'un mois et ne peut pas engendrer de nouveau couple. On a maintenant **trois** couples de lapins.

L5 Le premier couple de lapins a trois mois et le deuxième deux mois, ils peuvent donc engendrer chacun un nouveau couple de lapins, par contre le troisième n'a qu'un mois et ne peut pas engendrer de nouveau couple.
On a maintenant **cinq** couples de lapins.

Arbre :

Couple de lapins de 1 mois 

Couple de lapins de plus d'un mois 



En observant l'arbre ci-dessus, voire en le complétant encore pour quelques mois, on constate que le nombre de couples de lapins est égal à la somme des nombres de couples de lapins pour les deux mois précédents.
C'est-à-dire que : $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$

On a alors la suite :

$L_1 = 1$; $L_2 = 1$; $L_3 = 2$; $L_4 = 3$; $L_5 = 5$; $L_6 = 8$; $L_7 = 13$; $L_8 = 21$; $L_9 = 34$; $L_{10} = 55$; $L_{11} = 89$; $L_{12} = 144$

Remarques

Les différentes illustrations utilisées pour chacun de ces cinq problèmes ne sont pas forcément liées à la situation pour laquelle elles ont été choisies. Elles peuvent donc également être utilisées pour les autres problèmes.

Extensions et développements possibles.

Recherche du rapport entre deux termes successifs (rapport d'or)…

U_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
U_n / U_{n-1}		1	2	1.5	1.6667	1.6000	1.6250	1.6154	1.6190	1.6176	1.6182	1.6180

et voir que ce rapport tend vers le rapport d'or : $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1,61803$

Calcul de la limite de ce rapport.

En admettant que le rapport $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ admet une limite et en posant, pour n grand : $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

résoudre cette l'équation : $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n+1}}{U_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_n + U_{n-1}}{U_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_n}{U_{n-1}} = 1 + \frac{U_{n-1}}{U_n}$

Recherche de la forme algébrique de la suite de Fibonacci (Binet).