SEMAINE DE L'ARITHMÉTIQUE
proposition d'activité

Titre de l'activité	Quatre définitions, un seul nombre.
Résumé de l'activité	Le nombre d'or vu sous quatre angles différents, ce qui permet de mieux comprendre pourquoi il occupe une place si importante dans le cœur des hommes.
Type d'activité	Mise en équation. Résolution.
Degrés concernés	Tout degré dès que les élèves connaissent $(a + b)^2$
Énoncé destiné aux élèves	a) Quelle longueur faut-il ajouter à un segment de longueur 1, pour que le rapport de la longueur totale sur la longueur ajoutée soit égal au rapport de la longueur ajoutée sur la longueur initiale ? b) Comment partager un segment en deux parties de telle manière que le rapport de la grande partie sur la petite partie soit égal au rapport du tout sur la grande partie ? Déterminer ce rapport. c) Déterminer le côté du carré dont la valeur de l'aire augmente la valeur du côté de un. d) Déterminer le nombre positif dont l'inverse le diminue de 1.
Matériel	Une feuille contenant l'énoncé.
Durée	Environ 30-45 minutes.
Propositions de déroulement	Pour les élèves ne connaissant pas la formule du 2^e degré, il faut, au préalable, les entraîner à compléter des carrés pour résoudre une équation du 2^e degré. Travail en groupe de 2 à 4 personnes. Il est possible, peut-être même souhaitable suivant votre classe, de ne donner qu'une des activités à chaque groupe et que ce soit pendant la mise en commun que les élèves découvrent que cela donne à chaque fois le même nombre.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Mise en équation. Résolution d'équation.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Il est important de faire réaliser aux élèves, que c'est le fait que ces définitions très simples et qui ont l'air d'être indépendantes donnent toutes le nombre d'or, qui confère à Φ un statut "magique". Depuis les Grecs, très soucieux d'esthétique, qui ont découvert le nombre d'or et ces propriétés, les grandeurs dont le rapport donne ce nombre appelé aussi : "le rapport doré" ou "la divine proportion", sont considérées comme les plus harmonieuses et les plus belles.
Liens interdisciplinaires	Présence du nombre d'or dans l'art depuis les Grecs.

Quatre définitions, un seul nombre.

a) Quelle longueur faut-il ajouter à un segment de longueur 1, pour que le rapport de la longueur totale sur la longueur ajoutée soit égal au rapport de la longueur ajoutée sur la longueur initiale ?

b) Comment partager un segment en deux parties de telle manière que le rapport de la grande partie sur la petite partie soit égal au rapport du tout sur la grande partie ? Déterminer ce rapport.

c) Déterminer le côté du carré dont la valeur de l'aire augmente la valeur du côté de un.

d) Déterminer le nombre positif dont l'inverse le diminue de 1.

SEMAINE DES MATHÉMATIQUES

Titre de l'activité	Formule de Binet.
Résumé de l'activité	Découvrir la formule de Binet : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - (\bar{\Phi})^n)$.
Type d'activité	Activité d'observation, de manipulation algébrique élémentaire et de déduction avec justification.
Degrés concernés	(9-)1-2-3-4
Énoncés destinés aux élèves	a) Lien entre toute suite de nombre définie par : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, appelée suite fibonaccienne, et les nombres de Fibonacci. Partir de la définition de la suite : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Exprimer le terme d'indice le plus grand, au début c'est u_{n-1}, en fonction des 2 nombres précédents de la suite. Répéter la transformation précédente jusqu'à obtenir un lien entre u_n , deux nombres successifs quelconques de cette suite et les nombres de Fibonacci, en particulier, exprimer ce lien avec u_2 et u_1, puis avec u_1 et u_0. b) Rappel: Φ et $\bar{\Phi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 = x + 1$; Φ étant choisie strictement plus grande que $\bar{\Phi}$ (i.e. $\Phi > \bar{\Phi}$). Φ est appelé le nombre d'or. La suite des puissances du nombre d'or, est de type fibonaccienne. Il en est de même pour $\bar{\Phi}$. c) Exprimer Φ^n en fonction de F_n, de F_{n-1}, de Φ^1 et de Φ^0 , puis faire de même avec avec $\bar{\Phi}$ au lieu de Φ ,(($\bar{\Phi}$)^n en fonction de F_n, de F_{n-1}, de $\bar{\Phi}^1$ et de $\bar{\Phi}^0$). En déduire F_n en fonction de Φ et $\bar{\Phi}$.
Matériel	Pour chacune des trois étapes, une feuille contenant l'énoncé.
Durée	2 à 3 périodes de cours.
Propositions de déroulement	Donner le point a) Laisser les élèves en petits groupes. Après 15 à 30 minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves. Puis donner le point b). Après 15 à 30 minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves. Puis donner le point c) Après une quinzaine de minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves. Expliquer en quoi ce résultat est merveilleux en ce référant entre autre à l'importance de la suite de Fibonacci et du nombre d'or.

Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Mise en évidence d'un facteur commun. Propriétés des puissances. Résolution d'équation. Résolution d'un système d'équation simple.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Pour le point b), il est probable que les élèves n'auront pas l'idée d'exprimer φ^{n} et φ^{n-1} en fonction φ^{n-2} afin de pouvoir le mettre en évidence, s'ils ne l'ont jamais fait auparavant.

Formule de Binet

a) Lien entre toute suite de nombre définie par : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, appelée suite fibonaccienne, et les nombres de Fibonacci.
Partir de la définition de la suite : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
Exprimer le terme d'indice le plus grand à droite de l'égalité, en fonction des 2 termes précédents de la suite.
Répéter la transformation précédente jusqu'à obtenir un lien entre u_n , deux termes successifs quelconques de cette suite et les nombres de Fibonacci, en particulier, exprimer ce lien avec u_2 et u_1, puis avec u_1 et u_0.

b) Rappel: Φ et $\bar{\Phi}$ sont les solutions de l'équation : $x^2 = x + 1$; Φ étant choisie strictement plus grande que $\bar{\Phi}$ (i.e. $\Phi > \bar{\Phi}$). Φ est appelé le nombre d'or.

La suite des puissances du nombre d'or, est de type fibonaccienne.
Il en est de même pour $\bar{\Phi}$.

c) Exprimer Φ^n en fonction de F_n, de F_{n-1}, de Φ^1 et de Φ^0 , puis faire de même avec avec $\bar{\Phi}$ au lieu de Φ,(($\bar{\Phi}$)^n en fonction de F_n, de F_{n-1}, de $\bar{\Phi}^1$ et de $\bar{\Phi}^0$).
En déduire F_n en fonction de Φ et $\bar{\Phi}$.

Formule de Binet.

Enjeux de l'activité

Cela permet d'obtenir le n-ième terme de la suite de Fibonacci sans calculer les précédents et cela montre le lien étroit qu'il y a entre cette suite et les solutions de $x^2 = x + 1$, donc, en particulier, le nombre d'or.
Il nous paraît indispensable que les élèves aient découvert le nombre d'or et la suite de Fibonacci et qu'ils aient un minimum de culture sur ces deux objets, tellement important, pour qu'ils puissent contempler ce *Théorème* : du grec "théôrein", observer, contempler (la vérité ; dieu "théos").

Éléments de réponse

a)
$$
\begin{array}{lll}
u_n & = u_{n-1} + u_{n-2} & (= F_2\bullet u_{n-1} + F_1\bullet u_{n-2}) \\
 & = (u_{n-2} + u_{n-3}) + u_{n-2} & (= F_2\bullet(u_{n-2} + u_{n-3}) + F_1\bullet u_{n-2}) \\
 & = 2u_{n-2} + u_{n-3} & (= (F_2 + F_1)\bullet u_{n-2} + F_2\bullet u_{n-3} = F_3\bullet u_{n-2} + F_2\bullet u_{n-3}) \\
 & = 2(u_{n-3} + u_{n-4}) + u_{n-3} & (= F_3\bullet(u_{n-3} + u_{n-4}) + F_2\bullet u_{n-3}) \\
 & = 3u_{n-3} + 2u_{n-4} & (= (F_3 + F_2)\bullet u_{n-3} + F_3\bullet u_{n-4} = F_4\bullet u_{n-3} + F_3\bullet u_{n-4}) \\
 & = 3(u_{n-4} + u_{n-5}) + 2u_{n-4} & (= F_4\bullet(u_{n-4} + u_{n-5}) + F_3\bullet u_{n-4}) \\
 & = 5u_{n-4} + 3u_{n-5} & (= (F_3 + F_2)\bullet u_{n-3} + F_3\bullet u_{n-4} = F_4\bullet u_{n-3} + F_3\bullet u_{n-4}) \\
 & & (= \ldots\ldots\ldots) \\
 & & (= F_{n-1}\bullet u_2 + F_{n-2}\bullet u_1) \\
\text{si } u_o \text{ est défini(ssable)} & & (= F_n\bullet u_1 + F_{n-1}\bullet u_0)
\end{array}
$$

Pour une démonstration rigoureuse les …. sont remplacés par une démonstration par récurrence. La formule générale étant $u_n = F_{i+1}\bullet u_{n-i} + F_i\bullet u_{n-i-1}$ pour $n > 1$ et $n \geq i \geq 0$.

b) Conjecture à poser (traduction de l'énoncé) :

$\forall n$ entier plus grand ou égal à $2 \Rightarrow \Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2}$

Démonstration :

$\Phi^n = \Phi^{n-1} + \Phi^{n-2} \Leftrightarrow \Phi^2\bullet\Phi^{n-2} = \Phi\bullet\Phi^{n-2} + \Phi^{n-2} \Leftrightarrow \Phi^{n-2}\bullet(\Phi^2 - \Phi - 1) = 0$ or $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ par définition de Φ.

La même démonstration marche avec $\overline{\Phi}$.

c)
$$
\left.\begin{array}{l}
\Phi^n = F_n\bullet\Phi^1 + F_{n-1}\bullet\Phi^0 = F_n\bullet\Phi^1 + F_{n-1}\bullet 1 = F_n\bullet\Phi^1 + F_{n-1} \\
\\
\overline{\Phi}^n = F_n\bullet\overline{\Phi}^1 + F_{n-1}\bullet\overline{\Phi}^0 = F_n\bullet\overline{\Phi}^1 + F_{n-1}\bullet 1 = F_n\bullet\overline{\Phi}^1 + F_{n-1}
\end{array}\right\} \Rightarrow \Phi^n - \overline{\Phi}^n = F_n\bullet\Phi - F_n\bullet\overline{\Phi}
$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\Phi - \overline{\Phi}}(\Phi^n - (\overline{\Phi})^n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\Phi^n - (\overline{\Phi})^n)$$

Remarques :

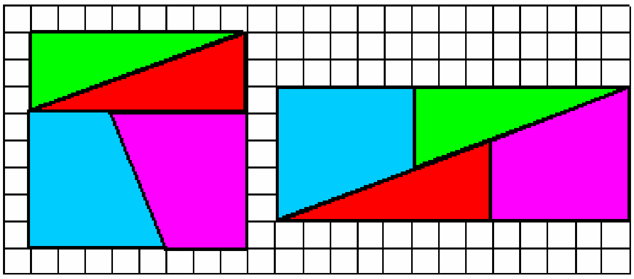
- Pour mettre en évidence l'unité des mathématiques, il est judicieux de faire remarquer que cette formule peut être obtenue via l'algèbre linéaire, ou encore mieux, faire, l'activité : Espace de Fibonacci.
- Comme $n > 0$ et que $|\overline{\Phi}| < 1$ ceci implique que plus n est grand plus $(\overline{\Phi})^n$ est proche de 0, donc pour n suffisamment grand la machine donnera : $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\Phi^n$.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre	**Un paradoxe en or ?**
Résumé de l'activité	Comprendre une illusion d'optique menant au paradoxe suivant : en changeant la disposition des pièces d'un puzzle on gagne une unité d'aire, pourquoi ? Comment la suite de Fibonacci joue-t-elle un rôle essentiel dans la construction de ce paradoxe ?
Type d'activité	Recherche
Degrés concernés	8^e^ - 9^e^ CO à 1^ère^ – 3^e^ du PO
Enoncé destiné aux élèves	see below

Enoncé.

a) Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2e figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?



b) Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ?

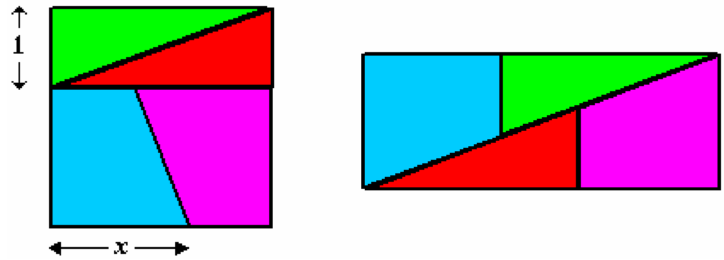
c) Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question.

d) On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55).
En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8;13;21) et (13;21;34) on a : $13^2 - 8 \cdot 21 = 13 \cdot 34 - 21^2$.

Est-ce vrai pour les suivants ? $13 \cdot 34 - 21^2 \overset{?}{=} 34^2 - 21 \cdot 55$.
Peut-on généraliser à $\left(f_{n-2}\ ;f_{n-1}\ ;f_n\right)$ et

$\left(f_{n-1}\ ;f_n\ ;f_{n+1}\right)$ par $f_n^2 - f_n \cdot f_{n-2} \overset{?}{=} f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$?

e) En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence) démontre que pour un quadruplet (f_{n+1} ; f_{n+2} ; f_{n+3} ; f_{n+4}) de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1} \cdot f_{n+4} - f_{n+2} \cdot f_{n+3} = \pm 1$ selon la parité de n.
Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle'

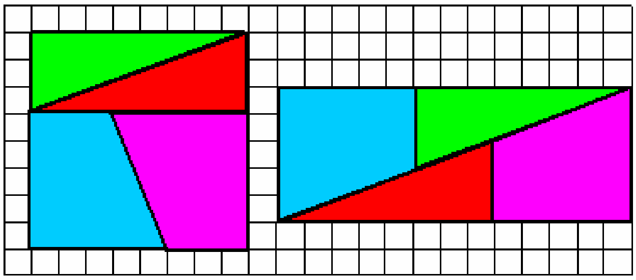
	devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu **f)** Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ? 
Matériel	Photocopie NB de l'énoncé pour les élèves. Eventuellement, une acétate couleur pour le rétroprojecteur.
Durée	Une à trois périodes selon l'engagement de la classe et l'ambition du prof
Proposition de déroulement	1. Travail à effectuer par petits groupes de 2-4 élèves. 2. Intervenir toutes les 5-10 minutes afin d'aiguiller les élèves dans leurs recherches. 3. Prendre appui sur les productions des élèves pour corriger peu à peu les différents points. 4. Adapter le rythme de travail, sa durée et le degré d'approfondissement des problèmes soulevés au niveau de la classe.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Selon l'age des élèves, les difficultés rencontrées sont très variables : - certains réfutent l'additivité des aires au lieu de remettre en question l'alignement des segments - d'autres bloquent sur l'écriture littérale - d'autres sur le calcul littéral, la manipulation d'expressions algébriques - et enfin, la plus grande difficulté est le passage de l'argument récursif sur un cas particulier au cas général. Il n'est pas inutile dans ce cas de s'assurer d'avoir traité suffisamment de cas particuliers (consécutifs) avant de passer à la démonstration formelle : si $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = 1$. La récurrence pour prouver $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$ contient une légère difficulté supplémentaire. La preuve peut être présentée par l'enseignant.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	- aire du carré, du rectangle et du triangle - pente (rapport entre la dénivellation et la distance horizontale correspondante (pour des 8e) ou taux de variation (pour des 1e -2e) - utilisation de l'écriture littérale pour formuler la conjecture. - démonstration par récurrence sur des cas particuliers. - démonstration générale par récurrence (davantage pour le PO) - modélisation d'une situation par une équation quadratique. - résolution d'une équation quadratique - approximation d'un irrationnel par une suite de rationnels
Développements possibles	Assemble les résultats précédents afin de démontrer rigoureusement : $\frac{f_2}{f_1} < \frac{f_4}{f_3} < \ldots \frac{f_{2n}}{f_{2n-1}} < \ldots < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \ldots < \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} < \ldots < \frac{f_5}{f_4} < \frac{f_3}{f_2}$

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Un paradoxe en or ?

Enoncé.

a) Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2^{e} figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?



b) Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$.
Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ?

c) Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question.

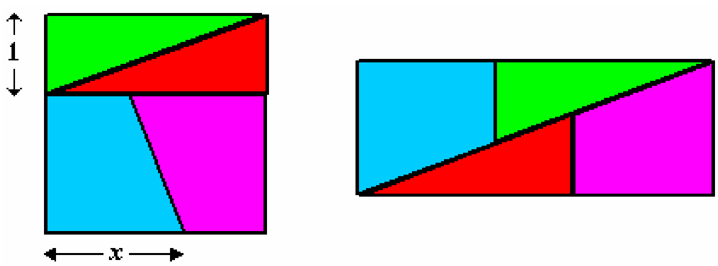
d) On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55).
En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8 ;13 ;21) et (13 ; 21 ; 34) on a : $13^2 - 8\cdot 21 = 13\cdot 34 - 21^2$.

Est-ce vrai pour les suivants ? $13\cdot 34 - 21^2 \overset{?}{=} 34^2 - 21\cdot 55$.

Peut-on généraliser à $(f_{n-2}\ ; f_{n-1}\ ; f_n)$ et $(f_{n-1}\ ; f_n\ ; f_{n+1})$ par $f_n^2 - f_n \cdot f_{n-2} \overset{?}{=} f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$?

e) En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence), démontre que pour un quadruplet $(f_{n+1}\ ; f_{n+2}\ ; f_{n+3}\ ; f_{n+4})$ de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$, selon la parité de n.
Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu.

f) Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ?



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Un paradoxe en or ?

Enjeux de l'activité.

Grosso modo il y a trois intentions pédagogiques derrière l'activité :
- faire comprendre que l'alignement (ou le non alignement) de points se démontre par le calcul de la pente (et non pas par une appréciation visuelle).
- faire découvrir la démonstration par récurrence dans un cas relativement simple : appliquer l'argument de récurrence sur plusieurs exemples particuliers afin de passer à l'argument général.
- faire apparaître le nombre d'or comme limite des quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci et discuter de son l'irrationalité.

Eléments de réponse.

a) Il suffit de comparer la pente du triangle rouge avec celle du trapèze rectangle violet pour déduire que l'apparente diagonale du rectangle est en fait une ligne brisée. La justification que 3/8 ≠ 2/5 peut s'appuyer sur l'un des arguments suivants :
1) les écritures décimales des deux fractions sont finies est distinctes
2) après amplification on obtient 15/40 ≠ 16/40
3) en utilisant le produit croisé, 15 ≠ 16
4) l'unicité d'écriture sous forme de faction irréductible à termes entiers positifs

b) Les trois termes appartiennent à la suite de Fibonacci et sont toujours consécutifs. On observe que la différence du carré du terme central et du produit des termes extrêmes égale toujours à ±1, d'une manière alternée.

c) Tester la conjecture sur (13 ; 21 ; 34), sachant qu'on a $13^2 - 8\cdot21 = 1$ revient à effectuer le calcul : $13\cdot34 - 21^2 = 13\cdot(13 + 21) - 21^2 = 13^2 + 13\cdot21 - 21^2 = 13^2 + (13 - 21)\cdot21 = 13^2 - 8\cdot21 = 1$.
D'une manière générale, montrons que si $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+2} = 1$.
En effet :

$$f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+2} = f_{n+1}^2 - f_n\cdot\left(f_{n+1}+f_n\right) = f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+1} - f_n^2 = f_{n+1}\left(f_{n+1}-f_n\right) - f_n^2 = f_{n+1}\cdot f_{n-1} - f_n^2 = 1$$

en utilisant le fait que $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ et que l'hypothèse de récurrence est $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$.

d) Montrons d'abord que $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = f_{n+1}\cdot f_{n+2} - f_n\cdot f_{n+3}$. En effet, comme $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, alors $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = f_{n+1}\cdot\left(f_{n+2} + f_{n+3}\right) - f_{n+2}\cdot\left(f_{n+1} + f_{n+2}\right) = f_{n+1}\cdot f_{n+3} - f_{n+2}^2$. Ce qui par le point **c)** égale à $f_{n+1}\cdot f_{n+2} - f_n\cdot f_{n+3}$. Par ailleurs, $f_1\cdot f_4 - f_2\cdot f_3 = 1\cdot3 - 1\cdot2 = 1$.
La différence des pentes du triangle appartenant au petit carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' = $\frac{f_{n+1}}{f_{n+3}} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+4}} = \frac{f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3}}{f_{n+3}\cdot f_{n+4}} = \frac{\pm1}{f_{n+3}\cdot f_{n+4}}$ par le résultat précédent.

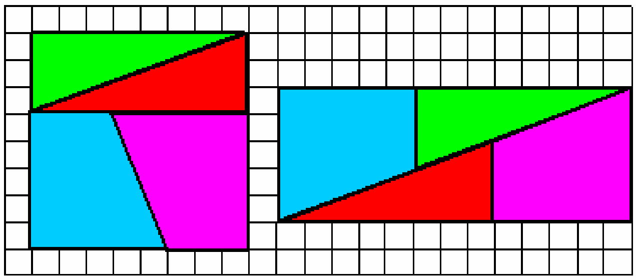
e) L'équation obtenue en fonction de x est $\frac{1}{x+1} = \frac{x}{2x+1}$. Ce qui revient à $x^2 - x - 1 = 0$. Pour la résoudre, on peut multiplier chacun des membres par 4, puis factoriser l'expression en complétant le carré : $4x^2 - 4x - 4 = (2x-1)^2 - 5 = (2x-1)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2x-1-\sqrt{5}\right)\left(2x-1+\sqrt{5}\right) = 0$
D'où la racine positive : $(1+\sqrt{5})\div2$, notée par convention φ.
L'irrationalité du nombre précédent peut se démontrer ainsi : supposons que $x = a/b$ (a et b des entiers positifs premiers entre eux). Ecrivons l'équation de départ sous la forme $x = 1 + 1/x$. Si l'on substitue x par a/b on obtient alors $a/b = (a+b)/b$. La fraction du membre de droite est aussi irréductible car $(a;b) = 1$, ce qui ne peut se produire selon la remarque 4 du point **a)**.
La normalisation du carré construit à l'aide de trois nombres consécutifs de la suite de Fibonacci permet de déduire géométriquement que f_{n+1}/f_n converge vers φ, lorsque n tend vers l'infini.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

<table>
<tr><td>Titre</td><td>Un paradoxe en or ?</td></tr>
<tr><td>Résumé de l'activité</td><td>Comprendre une illusion d'optique menant au paradoxe suivant :
en changeant la disposition des pièces d'un puzzle on gagne une unité d'aire, pourquoi ? Comment la suite de Fibonacci joue-t-elle un rôle essentiel dans la construction de ce paradoxe ?</td></tr>
<tr><td>Type d'activité</td><td>Recherche</td></tr>
<tr><td>Degrés concernés</td><td>8e - 9e CO à 1ère – 3e du PO</td></tr>
<tr><td>Enoncé destiné aux élèves</td><td>

Enoncé.

a) Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2e figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?



b) Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$. Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ?

c) Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question.

d) On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55).
En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8;13;21) et (13;21;34) on a : $13^2 - 8\cdot 21 = 13\cdot 34 - 21^2$.

Est-ce vrai pour les suivants ? $13\cdot 34 - 21^2 \overset{?}{=} 34^2 - 21\cdot 55$.
Peut-on généraliser à $(f_{n-2}\ ; f_{n-1}\ ; f_n)$ et

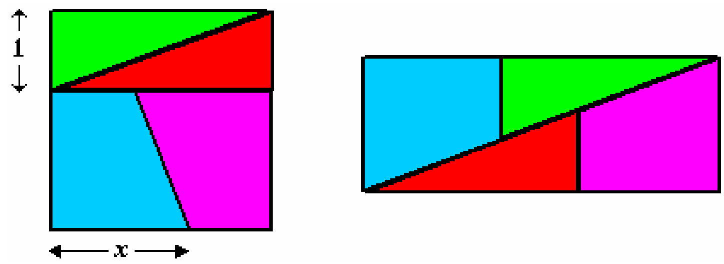
$(f_{n-1}\ ; f_n\ ; f_{n+1})$ par $f_n^2 - f_n\cdot f_{n-2} \overset{?}{=} f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$?

e) En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence) démontre que pour un quadruplet (f_{n+1} ; f_{n+2} ; f_{n+3} ; f_{n+4}) de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = \pm 1$ selon la parité de n.
Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle'

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>
devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu

f) Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ?



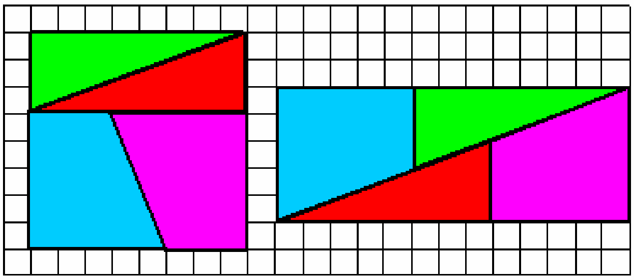
</td></tr>
<tr><td>Matériel</td><td>Photocopie NB de l'énoncé pour les élèves.
Eventuellement, une acétate couleur pour le rétroprojecteur.</td></tr>
<tr><td>Durée</td><td>Une à trois périodes selon l'engagement de la classe et l'ambition du prof</td></tr>
<tr><td>Proposition de déroulement</td><td>
1. Travail à effectuer par petits groupes de 2-4 élèves.
2. Intervenir toutes les 5-10 minutes afin d'aiguiller les élèves dans leurs recherches.
3. Prendre appui sur les productions des élèves pour corriger peu à peu les différents points.
4. Adapter le rythme de travail, sa durée et le degré d'approfondissement des problèmes soulevés au niveau de la classe.
</td></tr>
<tr><td>Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)</td><td>
Selon l'age des élèves, les difficultés rencontrées sont très variables :
- certains réfutent l'additivité des aires au lieu de remettre en question l'alignement des segments
- d'autres bloquent sur l'écriture littérale
- d'autres sur le calcul littéral, la manipulation d'expressions algébriques
- et enfin, la plus grande difficulté est le passage de l'argument récursif sur un cas particulier au cas général. Il n'est pas inutile dans ce cas de s'assurer d'avoir traité suffisamment de cas particuliers (consécutifs) avant de passer à la démonstration formelle :
si $f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n \cdot f_{n+2} = 1$.
La récurrence pour prouver $f_{n+1} \cdot f_{n+4} - f_{n+2} \cdot f_{n+3} = \pm 1$ contient une légère difficulté supplémentaire. La preuve peut être présentée par l'enseignant.
</td></tr>
<tr><td>Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence</td><td>
- aire du carré, du rectangle et du triangle
- pente (rapport entre la dénivellation et la distance horizontale correspondante (pour des 8^{e}) ou taux de variation (pour des 1^{e} -2^{e})
- utilisation de l'écriture littérale pour formuler la conjecture.
- démonstration par récurrence sur des cas particuliers.
- démonstration générale par récurrence (davantage pour le PO)
- modélisation d'une situation par une équation quadratique.
- résolution d'une équation quadratique
- approximation d'un irrationnel par une suite de rationnels
</td></tr>
<tr><td>Développements possibles</td><td>
Assemble les résultats précédents afin de démontrer rigoureusement :
$\frac{f_2}{f_1} < \frac{f_4}{f_3} < \ldots \frac{f_{2n}}{f_{2n-1}} < \ldots < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \ldots < \frac{f_{2n+1}}{f_{2n}} < \ldots < \frac{f_5}{f_4} < \frac{f_3}{f_2}$
</td></tr>
</table>

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Un paradoxe en or ?

Enoncé.

a) Le puzzle carré ci-dessous, constitué de 2 fois 2 pièces isométriques, a une aire de 64 unités. Comment se fait-il qu'en les réarrangeant on obtienne la 2e figure, qui semble avoir une aire de 65 unités ?



b) Les longueurs des côtés formant les angles droits des 4 pièces appartiennent à la suite de Fibonacci : 1 ; 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 8 ; 13 ; 21 ; 34 ; 55 ;… ; f_{n-1} ; f_n ; f_{n+1} ; … où $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$

Construis un paradoxe du même type (transformation d'un carré en un 'rectangle'), en utilisant d'autres termes consécutifs de la suite de Fibonacci.

La différence des aires de tes deux figures, carrée et rectangulaire, est-elle plus grande ou plus petite que précédemment ?

c) Fabrique d'autres paradoxes du même genre, puis formule une conjecture générale concernant la différence des aires de deux figures carrée et rectangulaire en question.

d) On appelle triplet fibonaccien, 3 termes consécutifs de la suite de Fibonacci.
Par exemple (3 ; 5 ; 8) ; (8 ; 13 ; 21) ; (13 ; 21 ; 34) et (21 ; 34 ; 55).
En utilisant uniquement les règles du calcul algébrique (distributivité, commutativité,…) et le fait que le dernier terme d'un triplet fibonaccien est la somme des deux premiers, prouve que pour les 2 triplets consécutifs (8 ;13 ;21) et (13 ; 21 ; 34) on a : $13^2 - 8 \cdot 21 = 13 \cdot 34 - 21^2$.

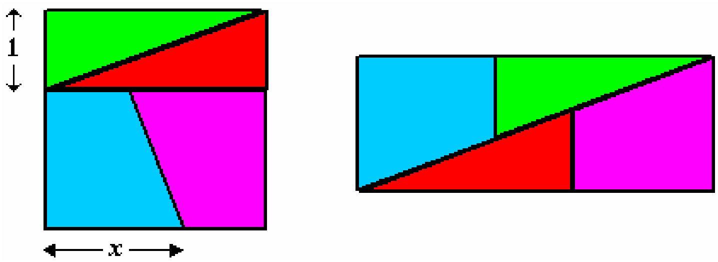
Est-ce vrai pour les suivants ? $13 \cdot 34 - 21^2 \overset{?}{=} 34^2 - 21 \cdot 55$.

Peut-on généraliser à $(f_{n-2}\ ;f_{n-1}\ ;f_n)$ et $(f_{n-1}\ ;f_n\ ;f_{n+1})$ par $f_n^2 - f_n \cdot f_{n-2} \overset{?}{=} f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 = \pm 1$?

e) En utilisant le même type d'argumentation (la récurrence), démontre que pour un quadruplet $(f_{n+1}\ ;f_{n+2}\ ;f_{n+3}\ ;f_{n+4})$ de termes de la suite de Fibonacci on a $f_{n+1} \cdot f_{n+4} - f_{n+2} \cdot f_{n+3} = \pm 1$, selon la parité de n.

Utilise le résultat précédent pour prouver que la différence des pentes du triangle appartenant au carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' devient très rapidement proche de 0 lorsque f_n grandit, et donc devient indécelable à l'œil nu.

f) Existe-t-il une valeur exacte x pour laquelle le paradoxe n'a pas lieu, c'est-à-dire pour laquelle la deuxième figure est bien un rectangle de même aire que le carré initial ? Commence par poser une équation mettant en relation la pente du petit triangle du carré avec la pente de la diagonale du rectangle. Quelle est la nature du nombre en question ?



SEMAINE DES MATHEMATICS

Un paradoxe en or ?

Enjeux de l'activité.

Grosso modo il y a trois intentions pédagogiques derrière l'activité :
- faire comprendre que l'alignement (ou le non alignement) de points se démontre par le calcul de la pente (et non pas par une appréciation visuelle).
- faire découvrir la démonstration par récurrence dans un cas relativement simple : appliquer l'argument de récurrence sur plusieurs exemples particuliers afin de passer à l'argument général.
- faire apparaître le nombre d'or comme limite des quotients de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci et discuter de son l'irrationalité.

Eléments de réponse.

a) Il suffit de comparer la pente du triangle rouge avec celle du trapèze rectangle violet pour déduire que l'apparente diagonale du rectangle est en fait une ligne brisée. La justification que 3/8 ≠ 2/5 peut s'appuyer sur l'un des arguments suivants :
1) les écritures décimales des deux fractions sont finies est distinctes
2) après amplification on obtient 15/40 ≠ 16/40
3) en utilisant le produit croisé, 15 ≠ 16
4) l'unicité d'écriture sous forme de faction irréductible à termes entiers positifs

b) Les trois termes appartiennent à la suite de Fibonacci et sont toujours consécutifs. On observe que la différence du carré du terme central et du produit des termes extrêmes égale toujours à ±1, d'une manière alternée.

c) Tester la conjecture sur (13 ; 21 ; 34), sachant qu'on a $13^2 - 8\cdot 21 = 1$ revient à effectuer le calcul :
$13\cdot 34 - 21^2 = 13\cdot(13 + 21) - 21^2 = 13^2 + 13\cdot 21 - 21^2 = 13^2 + (13 - 21)\cdot 21 = 13^2 - 8\cdot 21 = 1$.
D'une manière générale, montrons que si $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$ alors $f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+2} = 1$.
En effet :

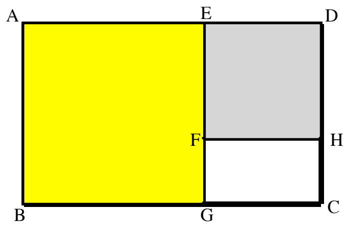
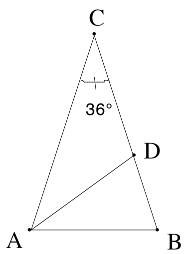
$$f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+2} = f_{n+1}^2 - f_n\cdot\left(f_{n+1} + f_n\right) = f_{n+1}^2 - f_n\cdot f_{n+1} - f_n^2 = f_{n+1}\left(f_{n+1} - f_n\right) - f_n^2 = f_{n+1}\cdot f_{n-1} - f_n^2 = 1$$

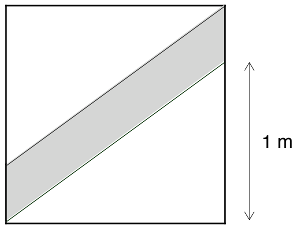
en utilisant le fait que $f_{n+1} - f_n = f_{n-1}$ et que l'hypothèse de récurrence est $f_{n-1}\cdot f_{n+1} - f_n^2 = 1$.

d) Montrons d'abord que $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = f_{n+1}\cdot f_{n+2} - f_n\cdot f_{n+3}$. En effet, comme $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$, alors $f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3} = f_{n+1}\cdot\left(f_{n+2} + f_{n+3}\right) - f_{n+2}\cdot\left(f_{n+1} + f_{n+2}\right) = f_{n+1}\cdot f_{n+3} - f_{n+2}^2$. Ce qui par le point **c)** égale à $f_{n+1}\cdot f_{n+2} - f_n\cdot f_{n+3}$. Par ailleurs, $f_1\cdot f_4 - f_2\cdot f_3 = 1\cdot 3 - 1\cdot 2 = 1$.
La différence des pentes du triangle appartenant au petit carré et de celle de la diagonale du 'rectangle' = $\frac{f_{n+1}}{f_{n+3}} - \frac{f_{n+2}}{f_{n+4}} = \frac{f_{n+1}\cdot f_{n+4} - f_{n+2}\cdot f_{n+3}}{f_{n+3}\cdot f_{n+4}} = \frac{\pm 1}{f_{n+3}\cdot f_{n+4}}$ par le résultat précédent.

e) L'équation obtenue en fonction de x est $\frac{1}{x+1} = \frac{x}{2x+1}$. Ce qui revient à $x^2 - x - 1 = 0$. Pour la résoudre, on peut multiplier chacun des membres par 4, puis factoriser l'expression en complétant le carré : $4x^2 - 4x - 4 = (2x-1)^2 - 5 = (2x-1)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(2x-1-\sqrt{5}\right)\left(2x-1+\sqrt{5}\right) = 0$
D'où la racine positive : $(1+\sqrt{5})\div 2$, notée par convention φ.
L'irrationalité du nombre précédent peut se démontrer ainsi : supposons que $x = a/b$ (a et b des entiers positifs premiers entre eux). Ecrivons l'équation de départ sous la forme $x = 1 + 1/x$. Si l'on substitue x par a/b on obtient alors $a/b = (a+b)/b$. La fraction du membre de droite est aussi irréductible car $(a;b) = 1$, ce qui ne peut se produire selon la remarque 4 du point **a)**.
La normalisation du carré construit à l'aide de trois nombres consécutifs de la suite de Fibonacci permet de déduire géométriquement que f_{n+1}/f_n converge vers φ, lorsque n tend vers l'infini.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	Dérivation géométrique de l'équation pour ϕ
Résumé de l'activité	Trois activités à traiter en parallèle, qui font apparaître, dans trois situations différentes, la même équation, dont la solution est le nombre d'or.
Type d'activité	Activité de recherche et de développement.
Degrés concernés	CO – PO
Enoncé destiné aux élèves	1. Rectangle Quelles doivent être les dimensions du rectangle ABCD si l'on veut que le rapport entre l'aire du carré ABGE et le rectangle ABCD soit égal au rapport entre l'aire du carré DEFH et celle du rectangle CDEG ?  2. Triangle Le triangle ci-dessous est un triangle isocèle dont l'angle ACB vaut 36°. Le segment AD est la bissectrice de l'angle CAB.  Calculer le rapport entre les segments CD et DB. 3. Carré

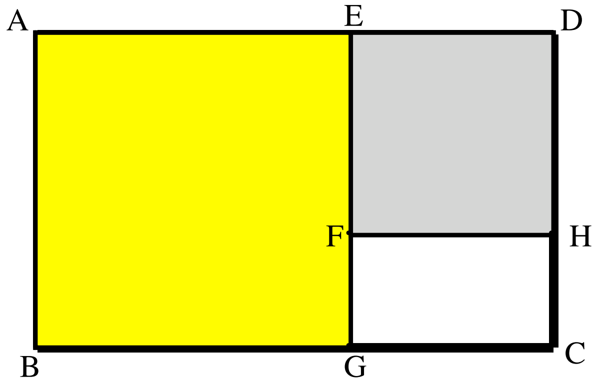
	Quelles doivent être les dimensions du carré ci-dessous si l'on veut que l'aire ombrée soit égale à 1 m^2 ? 
Matériel	Papier, crayon et calculatrice
Durée	45 min
Propositions de déroulement	Travail en groupe, une partie des élèves résolvant l'activité rectangle, une autre l'activité triangle et la troisième l'activité carré. Prendre en compte que l'activité carré est la plus facile et l'activité triangle la plus difficile.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Calcul d'aire. Rapports. Triangles isocèles Calcul et somme d'angles. Situation de proportionnalité et théorème de Thalès. . Calcul littéral. Equation réductible au deuxième degré [A*u CO solution à donner, voir justifications donnés à la fin de la fiche du maître.*]
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	1. Aucune mesure n'étant donnée, cette question mène à une équation dont l'inconnue est le rapport entre les dimensions du rectangle. Pour éviter cette difficulté, il est possible d'ajouter dans l'énoncé une donnée numérique ; par exemple : « l'aire du carré ABGE vaut 1 m^2 » ou « la longueur AB vaut 1 dm », …… 2. Aucune mesure n'étant donnée, cette question mène à une équation dont l'inconnue est le rapport entre les dimensions des deux triangles semblables (ou le rapport entre le côté et la base du triangle d'or). Pour éviter cette difficulté, il est possible d'ajouter dans l'énoncé une donnée numérique ; comme : « la base du triangle AB vaut 1 dm », …… 3. Cette activité demandant moins de temps que les deux autres, il devrait être possible de demander aux élèves des groupes qui la traitent de chercher par tâtonnement la solution de l'équation du deuxième degré. En divisant par x, l'équation $x^2 - x = 1$, et nommant ϕ la solution, on

	peut voir que $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$ et chercher ensuite le nombre ϕ dont l'inverse est égal à la différence de ϕ et de 1.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Triangles semblables et similitudes. Rapports, rapport d'or. Equations. Aire d'un parallélogramme. Calcul littéral. Transformation d'équations.
Développements possibles	Nombre d'or : indiquer que la valeur obtenue pour le rapport entre les côtés du rectangle d'or, le côté et la base du triangle d'or, la longueur du côté du carré défini dans l'activité est généralement appelée ϕ (phi) .
Liens interdisciplinaires	Histoire des sciences et des arts. Sciences naturelles.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enoncé *Activité 1 : Le rectangle d'or*

Quelles doivent être les dimensions du rectangle ABCD si l'on veut que le rapport entre l'aire du carré ABGE et le rectangle ABCD soit égal au rapport entre l'aire du carré DEFH et celle du rectangle CDEG ?



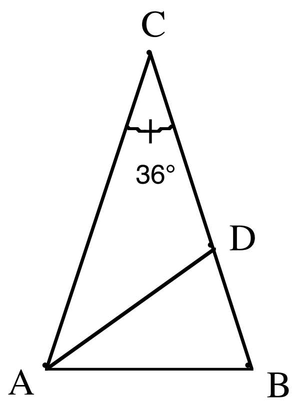
Autre énoncé possible (7ème et 8ème du CO)

Si la longueur AB vaut 1dm, quelle doit être la longueur du côté BC si l'on veut que le rapport entre l'aire du carré ABGE et le rectangle ABCD soit égal au rapport entre l'aire du carré DEFH et celle du rectangle CDEG ?

Enoncé *Activité 2 Le triangle*

Le triangle ci-contre est un triangle isocèle dont l'angle ACB vaut 36°. Le segment AD est la bissectrice de l'angle CAB.

Calculer le rapport entre les segments CD et DB.

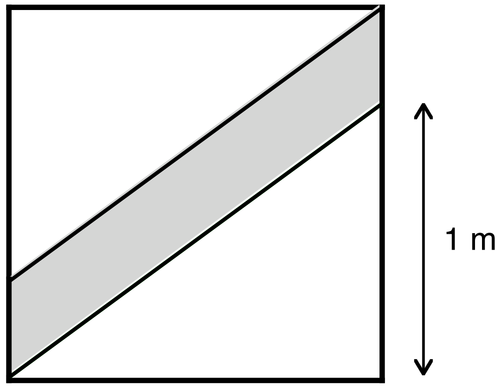


Autre énoncé possible (7ème et 8ème du CO)

Le triangle ci-dessous est un triangle isocèle dont la longueur du côté AB vaut 1 dm et l'angle ACB vaut 36°. Sachant que le segment AD est la bissectrice de l'angle CAB, calculer le rapport entre les segments CD et DB.

Enoncé *Activité 3 : Le carré d'or*

Quelles doivent être les dimensions du carré ci-contre si l'on veut que l'aire ombrée soit égale à 1 m^2 ?



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Dérivation géométrique de l'équation pour ϕ

Enjeux de l'activité

Ces trois questions menant toutes à la même solution, le rapport d'or (le nombre d'or), ont pour objectif de « créer un mystère » qui devrait permettre à l'enseignant de présenter ce nombre "historique", la divine proportion ou section dorée, qui allie mythe réalité. (Cf. Partie théorique de la semaine des maths et sites extérieurs cités.)

Indications

Ces trois activités ont été créées en partant de situations qui font partie de l'histoire des mathématiques.

L'activité « **rectangle** », en fait un rectangle d'or, est liée à l'approximation de la construction par carrés successifs, carrés dont les côtés sont donnés par la suite de Fibonacci, d'un rectangle d'or.

L'activité « **triangle** » est liée à la construction, à la règle et au compas, du décagone et donc de ce fait du pentagone.
L'étude de ce triangle, cas particulier du rapport d'or dans le pentagramme, « pentagramme chéri par les pythagoriciens », permet de réduire l'étude générale des différents rapports d'or à un cas particulier.

L'activité « **carré** » n'est qu'un clown, à peine déguisé, de la résolution antique, avant l'invention de l'algèbre, de l'équation : « $x^2 = x+1$ ». (Cf. ci-dessous page 5)

Développements possibles

Géométriques

1. Les enseignant(e)s dont les élèves ne possèdent pas les bases algébriques suffisantes pour résoudre l'équation « $x^2 = x+1$ » et qui souhaitent justifier ses solutions trouveront, après les corrigés des trois activités, la méthode géométrique utilisée pour résoudre cette équation avant l'invention du calcul algébrique.[1]

Algébriques

2. Les enseignant(e)s, dont les élèves ont déjà travaillé les identités remarquables mais qui ne possèdent pas encore les bases algébriques suffisantes pour résoudre l'équation « $x^2 = x+1$ », qui souhaitent justifier ses solutions trouveront, après les corrigés des trois activités, la méthode pour la résoudre par complétion du carré.
3. Voir, en partant de l'équation : « $x^2 = x+1$ » que $x^2 - x = 1$, puis en divisant par x, que $\frac{1}{x} = x^{-1} = x - 1$.
4. Voir, en partant de l'équation : « $x^2 = x+1$ » que
« $x^3 = x(x^2) = x(x+1) = x^2 + x = (x+ 1) + x = 2x + 1$ » puis généraliser ce résultat.

[1] Une introduction à l'histoire de l'algèbre.
Résolution des équations des Mésopotamiens à la Renaissance.
Jacques Sesiano 1996 . Ed. PPUR, EPFL.

Eléments de réponse

Correction activité 1 : rectangle

Cas général

Dans le rectangle ABCD, appelons a la longueur du côté AB et b la longueur du côté BC.

On a alors : AB = EG = DC = a
BC = AD = b
ED = FH = GC = b – a

Et, $A_{ABCD} = ab$
$A_{ABGE} = a^2$
$A_{EGCD} = a(b–a)$
$A_{EFHD} = (b–a)^2$

Pour que les rapports entre les aires des carrés et des rectangles successifs soient égaux, il faut que :

$$\frac{A_{ABGE}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{EFHD}}{A_{EGDC}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{ab} = \frac{(b-a)^2}{a(b-a)} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b-a}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{a}{a} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - 1$$

Si l'on pose : $\frac{b}{a} = x$, on obtient l'équation : $\frac{1}{x} = x - 1$

équation que l'on peut transformer en la multipliant par x de manière à obtenir :

$$\frac{1}{x} \bullet x = (x-1) \bullet x \Leftrightarrow 1 = x^2 - x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$$

Cas simplifié : AB = 1

Dans le rectangle ABCD, appelons x la longueur du côté BC.

On a alors : AB = EG = DC = 1
BC = AD = x
ED = FH = GC = x – 1

Et, $A_{ABCD} = x$
$A_{ABGE} = 1$
$A_{EGCD} = x–1$
$A_{EFHD} = (x–1)^2$

Pour que les rapports entre les aires des carrés et des rectangles soient égaux, il faut que :

$$\frac{A_{ABGE}}{A_{ABCD}} = \frac{A_{EFHD}}{A_{EGDC}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x-1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1} - \frac{1}{1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = x - 1$$

équation que l'on peut transformer en la multipliant par x de manière à obtenir :

$$\frac{1}{x} \bullet x = (x-1) \bullet x \Leftrightarrow 1 = x^2 - x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$$

Si les élèves ne connaissent pas la formule, dite de Viète, donner la solution de l'équation ci-dessus. Pour justifier la solution donnée, il est possible de passer par la résolution géométrique ou par complétion du carré de l'équation $x^2=x+1$ qui se trouvent après les trois corrections.

Correction activité 2 : triangle

Cas général

Dans le triangle ABD, appelons a la longueur du côté AC et b la longueur du côté AC.

Le triangle ABC étant isocèle les angles CAB et CBA sont égaux et valent chacun 72°.

AD étant la bissectrice de CAB, les angles CAD et DAB sont égaux et valent chacun 36°.

Le triangle ADC est donc isocèle (ACD = CAD = 36°), d'où : AD = DC
Le triangle ABD est également isocèle (ADB `ABD = 72°), d'où : AD = AB

On a alors : AB = AD = DC = b
AC = BC = a
BD = a–b

Les triangles ABC et ABD ayant des angles égaux (triangles semblables) les rapports entre les côtés homologues sont constants (grandeurs proportionnelles).

On a : $\frac{b}{a} = \frac{a-b}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} - \frac{b}{b} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b} - 1$

Le rapport cherché étant :
$\frac{CD}{DB} = \frac{b}{a-b}$, on voit, en posant $x = \frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ que l'égalité ci – dessus

donne l'équation : $\frac{1}{x} = x - 1$

équation que l'on peut transformer en la multipliant par x de manière à obtenir :

$$\frac{1}{x} \bullet x = (x-1) \bullet x \Leftrightarrow 1 = x^2 - x \Leftrightarrow 1 + x = x^2$$

Cas simplifié : AB = 1

Dans le triangle ABD, appelons x la longueur du côté AC.

On a : AB = AD = DC = 1
AC = BC = x
BD = x–1

Le rapport cherché étant : $\frac{CD}{DB} = \frac{1}{x-1}$, et les triangles ABC et ABD ayant des angles égaux,

on a :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow (x-1) \bullet x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 = x + 1$$

Si les élèves ne connaissent pas la formule, dite de Viète, donner la solution de l'équation ci-dessus. Pour justifier la solution donnée, il est possible de passer par la résolution géométrique ou par complétion du carré de l'équation $x^2=x+1$ qui se trouvent après les trois corrections.

Correction activité 3 : carré

Méthode 1° : Calcul de l'aire du parallélogramme

Appelons x la longueur d'un des côtés du carré.

L'aire du parallélogramme ombré est alors égale à : $(x-1) \cdot x \Leftrightarrow x^2 - x$

Cette aire devant être égale à 1, on peut poser : $x^2 - x = 1$

et obtenir l'équation : $x^2 = 1 + x$

Méthode 2° : Calcul de l'aire du carré et des deux triangles rectangles

Appelons x la longueur d'un des côtés du carré.

L'aire du carré est égale à : x^2

et l'aire de chacun de triangles est égale à : $\frac{x \cdot 1}{2}$

L'aire du parallélogramme ombré est alors égale à : $x^2 - 2\frac{x \cdot 1}{2} = x^2 - x$

Cette aire étant égale à 1, on peut poser : $x^2 - x = 1$

Et obtenir l'équation : $x^2 = 1 + x$

Si les élèves ne connaissent pas la formule, dite de Viète, donner la solution de l'équation ci-dessus. Pour justifier la solution donnée, il est possible de passer par la résolution géométrique ou par complétion du carré de l'équation $x^2=x+1$ qui se trouvent après les trois corrections.

Indication complémentaire

La troisième partie de cette activité étant plus simple (plus courte) que les deux autres, il peut être intéressant de :

1. En transformant l'équation : « $x^2 = x+1$ » en « $x^2 - x = 1$ », puis en divisant la deuxième par x : $\frac{1}{x} = x^{-1} = x - 1$. (*Un nombre dont l'inverse est inférieur d'une unité à sa valeur.*)
2. Laisser les élèves chercher avec leur calculatrice, par approximations successives, un nombre dont le carré dépasse d'une unité sa valeur.

Résolution géométrique de l'équation : $x^2 = x + 1$

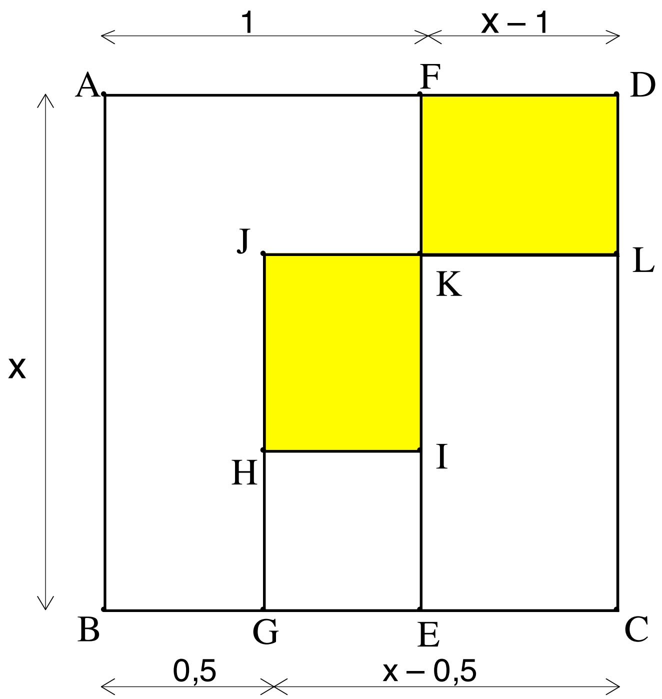
Pour résoudre cette équation nous allons placer dans un carré ABCD d'aire :

$\mathbf{A_{ABCD} = x^2}$

deux rectangles ABEF et FECD dont les aires respectives valent :

$\mathbf{A_{ABEF} = x}$ (AF = BE = 1) et $\mathbf{A_{FECD}} = 1$

Après avoir placé le point G au milieu du segment BE (BG = GE = 0,5), on trace une perpendiculaire à BC passant par G.
Sur cette perpendiculaire, on place le point H de manière à ce que GH = GE (GH = 0,5) et J de manière à ce que HJ = EC (HJ = x – 1).



Par construction, le quadrilatère JGCL et un carré (GC = GJ) et son aire vaut :

$\mathbf{A_{JGCL} = (x–0,5)^2}$

Les deux rectangles JHIK et FKLD étant égaux

DL = DC – LC = 0,5 et KI = JH = EC = FD = x – 1,

on peut connaître l'aire du carré JGCL en le décomposant de la manière ci-dessous :

$\mathbf{A_{JGCL} = (A_{KECL} + A_{JHIK}) + A_{GEIH} = A_{FECD} + A_{GEIH} = 1 + 0,5^2}$

On a donc :

$\mathbf{A_{JGCL} = (x–0,5)^2 = 1 + 0,5^2}$

Equation que l'on peut résoudre en prenant la racine positive (x > 1) des deux cotés de l'égalité.

On obtient alors : $x = 0,5 + \sqrt{(1 + 0,25)} = 0,5 + \dfrac{\sqrt{4 \times 1,25}}{2} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,618$

Résolution de l'équation : $x^2 = x + 1$ par complétion du carré

$$x^2 = x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 \bullet \frac{1}{2} \bullet x - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 \bullet \frac{1}{2} \bullet x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow\; x - 2 \bullet \frac{1}{2} \bullet x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = 0 \;\Leftrightarrow\; x - 2 \bullet \frac{1}{2} \bullet x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$

D'où

$$\left(x - \frac{1}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Et comme x >1, on peut écrire : $x = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre	**L'espace de Fibonacci**
Résumé de l'activité	Découvrir une structure d'espace vectoriel dans un cadre différent de la géométrie vectorielle et en déduire la formule de Binet.
Type d'activité	D'approfondissement (espace vectoriel) + de recherche
Degrés concernés	3^e – 4^e du PO et +
Enoncé destiné aux élèves	On dira qu'une suite de nombres réels $\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ est *fibonaccienne* si elle vérifie la condition $a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$ pour tout $k\in\mathbf{N}$ Définissons la somme de deux suites fibonacciennes de manière la plus naturelle qu'il soit par : $$\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}+\{b_n\}_{n\in\mathbf{N}}=\{a_n+b_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$ De même, la multiplication externe par un nombre réel λ par : $$\lambda\cdot\{a_n\}_{n\in\mathbf{N}}=\{\lambda\cdot a_n\}_{n\in\mathbf{N}}$$ **a)** Montrez que muni de ces deux opérations, l'ensemble des suites fibonacciennes forme un **espace vectoriel** sur $\mathbf{R}$. **b)** Inventez trois exemples de suites fibonacciennes à termes entiers. Essayez d'écrire l'une comme **combinaison linéaire** des deux autres. **c)** Exhibez une **base** « naturelle » de cet espace vectoriel, sachant que toute suite fibonaccienne est entièrement caractérisée par la donnée de ses deux premiers éléments. **d)** Parmi toutes les suites fibonacciennes y en a-t-il de la forme $\{\ 1\ ;\ a\ ;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ ...\ a^n;\ a^{n+1};\ ....\}$? Si oui, pour quelles valeurs de a ? **e)** Montrez que les deux vecteurs Φ et $\bar{\Phi}$ obtenus précédemment, sont **linéairement indépendants** et donc forment un base. **f)** Posons $F=\{\ 1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 13\ ;....\}$ la suite de Fibonacci classique. Ecrivez F sous la forme **d'une combinaison linéaire** de la base Φ et $\bar{\Phi}$. **g)** Déduisez la 100^e valeur de la suite de Fibonacci à l'aide de la combinaison linéaire.
Matériel	Papier et crayon
Durée	De 1 à 3 périodes selon les connaissances préalables des élèves
Proposition de déroulement	Faire travailler les élèves par petits groupes ou individuellement. Effectuer des mises en commun toutes les 5-10 minutes en aiguillant ou corrigeant au fur et à mesure. Adapter le rythme de déroulement selon les prérequis des élèves.
Analyse préalable	Mettre bien en évidence que :

de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	- l'élément neutre est la suite nulle {0;0;0;…} - il n'est pas si évident que les élèves proposent par eux même une base « naturelle » comme {1;0;1;1;2;3;5 ;…} et {0;1;1;2;3;5…} sa translatée (très inspirée de, mais à ne à ne pas confondre avec (1;0) et (0;1)). La démonstration de leur indépendance linéaire et le fait qu'ils engendrent entièrement l'espace est quasi immédiat.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	- définition d'un espace vectoriel - indépendance linéaire - combinaison linéaire - base d'un espace vectoriel
Consolidation et développements possibles	Ecrire la suite de Lucas { 1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 11 ; …} sous la forme d'une combinaison linéaire de la base Φ et $\overline{\Phi}$. Si l'on notes les termes de la suite de Fibonacci par f_i (avec $f_0 = 0,\ f_1 = 1$ et $f_{i+1} = f_i + f_{i-1}$) et ceux de la suite de Lucas par l_i (avec $l_0 = 2,\ l_1 = 1$ et $l_{i+1} = l_i + l_{i-1}$) alors grâce à l'écriture de chacun des termes des deux suites sous la forme de combinaisons linéaires de Φ et $\overline{\Phi}$, prouvez les relations suivantes : **a)** $2f_{m+n} = f_m l_n + f_n l_m$ **b)** $l_n^2 - 5f_n^2 = (-1)^n \cdot 4$ **c)** $f_n^2 + f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n-1}$ **d)** $l_n^2 + l_{n-1}l_{n+1} = (-1)^n \cdot 5$

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

L'espace de Fibonacci

Enoncé.

On dira qu'une suite de nombres réels $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est *fibonaccienne* si elle vérifie la condition
$a_{k+1} = a_k + a_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$
Définissons la somme de deux suites fibonacciennes de manière la plus naturelle qu'il soit par :

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} + \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{a_n + b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

De même, la multiplication externe par un nombre réel λ par :

$$\lambda \cdot \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{\lambda \cdot a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

a) Montrez que muni de ces deux opérations, l'ensemble des suites fibonacciennes forme un **espace vectoriel** sur $\mathbb{R}$.

b) Inventez trois exemples de suites fibonacciennes à termes entiers.
Essayez d'écrire l'une comme **combinaison linéaire** des deux autres.

c) Exhibez une **base** « naturelle » de cet espace vectoriel, sachant que toute suite fibonaccienne est entièrement caractérisée par la donnée de ses deux premiers éléments.

d) Parmi toutes les suites fibonacciennes y en a-t-il de la forme
$\{\ 1\ ;\ a\ ;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ ...\ a^n;\ a^{n+1};\ ....\}$? Si oui, pour quelles valeurs de a ?

e) Montrez que les deux vecteurs obtenus au point **d)**, notés Φ et $\overline{\Phi}$, sont **linéairement indépendants** et donc forment une base.

f) Posons $F = \{\ 0\ ;1\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 5\ ;\ 8\ ;\ 13\ ;....\}$ la suite de Fibonacci classique.
Ecrivez F sous la forme **d'une combinaison linéaire** de la base Φ et $\overline{\Phi}$.

g) Déduisez la 100e valeur de la suite de Fibonacci à l'aide de la combinaison linéaire

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

L'espace de Fibonacci

Enjeux de l'activité.

Permettre aux élèves d'explorer les notions sous-jacentes à un espace vectoriel,
- combinaison linéaire
- indépendance linéaire
- base d'un espace vectoriel
- dimension

en étudiant des suites fibonaccienes.

Eléments de réponse.

a) Les vérifications des axiomes d'un espace vectoriel ne contiennent aucune difficulté majeure. Quelques détails éventuellement à relever avec les élèves :
1) L'addition est bien interne
2) Les deux « · » dans la définition de la multiplication ne sont pas les mêmes, malgré les apparences : la première étant externe et la seconde étant interne aux réels.
3) l'élément neutre **0** = { 0 ; 0 ; 0 ; …} ≠ 0

b) et c) Pour se simplifier le travail, prenons A = {1;0;1;1;2;3;5 ;…}, B = {0;1;1;2;3;5…} et C = { *m* ; *n* ; *m* + *n* ; *m* + 2*n* ; …}. D'où $m \cdot A + n \cdot B = C$.
De plus si $\lambda \cdot \mathrm{A} + \mu \cdot \mathrm{B} = \{0;0;0;...\}$ alors $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

d) Pour que $\{\ 1\ ;\ a\ ;\ a^2;\ a^3;\ a^4;\ ...\ a^n;\ a^{n+1};\ ....\}$ soit fibonaccienne il faut que $1 + a = a^2$.
D'où $a_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ qui sera noté φ et $a_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, noté $\overline{\varphi}$.De plus, pour ces deux valeurs de a, il va de soi que trois termes consécutifs de la suite ci-dessus vérifient forcément la relation $a^k + a^{k+1} = a^{k+2}$, puisque $a^k + a^{k+1} = a^k(1+a) = a^k \cdot a^2 = a^{k+2}$. Elle est donc bien fibonaccienne.

e) Posons $\Phi = \{1;\varphi;\varphi^2;\varphi^3;\varphi^4...\}$ et $\overline{\Phi} = \{1;\overline{\varphi};\overline{\varphi}^2;\overline{\varphi}^3;\overline{\varphi}^4...\}$.

Si $\lambda \cdot \Phi + \mu \cdot \overline{\Phi} = \{0;0;0;0;...\}$ alors $\begin{cases} \lambda + \mu = 0 \\ \lambda\varphi + \mu\overline{\varphi} = 0 \end{cases}$. D'où $\lambda(\varphi - \overline{\varphi}) = 0$ → $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

f) Déterminons α et β afin que $\alpha \cdot \Phi + \beta \cdot \overline{\Phi} = \{0;1;1;2;3;5;8;...\}$. On obtient alors $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha\varphi + \beta\overline{\varphi} = 1 \end{cases}$

D'où : $\alpha(\varphi - \overline{\varphi}) = \alpha\sqrt{5} = 1$ c'est-à-dire $\alpha = 1/\sqrt{5}$ et $\beta = -1/\sqrt{5}$.

D'où la formule de Binet : $\{0;1;1;2;3;5;8;...\} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi - \overline{\Phi}\right)$ et le 100e terme $= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{99} - \overline{\varphi}^{99}\right)$.

Exercices de consolidation et de développement

1) Ecrivez la suite de Lucas { 2 ; 1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 11 ; …} sous la forme d'une combinaison linéaire de la base Φ et $\overline{\Phi}$.

2) Si l'on note les termes de la suite de Fibonacci par f_i (avec $f_0 = 0, f_1 = 1$ et $f_{i+1} = f_i + f_{i-1}$) et ceux de la suite de Lucas par l_i (avec $l_0 = 2,\ l_1 = 1$ et $l_{i+1} = l_i + l_{i-1}$) alors grâce à l'écriture de chacun des termes des deux suites sous la forme de combinaisons linéaires de Φ et $\overline{\Phi}$, prouvez les relations suivantes :

a) $2f_{m+n} = f_m l_n + f_n l_m$

b) $l_n^2 - 5f_n^2 = (-1)^n \cdot 4$

c) $f_n^2 + f_{n-1}f_{n+1} = (-1)^{n-1}$

d) $l_n^2 + l_{n-1}l_{n+1} = (-1)^n \cdot 5$

SEMAINE DE L'ARITHMÉTIQUE
proposition d'activité

Titre de l'activité	F_n divise F_{kn}.
Résumé de l'activité	Démontrer que le n-ieme nombre de Fibonacci F_n divise le (kn)-ieme nombre de Fibonacci F_{kn}.
Type d'activité	Activité démonstrative.
Degrés concernés	Collège (2-)3-4
Énoncé destiné aux élèves	Soit $(F_n)_{n>0}$ la suite de Fibonacci. Démontrer que pour tous entiers positifs n et k, F_n divise F_{kn}.
Matériel	Feuille d'énoncé.
Durée	Deux périodes
Propositions de déroulement	Cette activité devrait être précédée de l'activité « Qui divise qui », car elle en est la continuation logique. En effet l'activité « Qui divise qui » permet de découvrir la conjecture et de la démontrer pour certains 2= F_3 , 3 = F_4 ou 5= F_5. Après ces exemples, il faut essayer de faire apparaître la conjecture. La difficulté étant de rattacher la périodicité d'apparition des éléments F_k divisibles par F_n avec l'indice n de l'élément F_n. Si le but est d'arriver a la démonstration par induction, les démonstrations proposées dans « Qui divise qui » peuvent être ignorées. Un manière de démontrer que F_n divise F_{kn} est d'utiliser la formule suivante : Pour j et n >1 $F_{j+n} = F_n F_{j+1} + F_{n-1} F_j$. Il faudrait démontrer cette formule par induction. On peut soit de donner l'énoncé tel quel, soit d'essayer de suggérer de la découvrir en partant de cas particuliers. Reste à démontrer par induction le résultat initial en prenant pour j la valeur n*k. Pour terminer en utilisant la contraposée du résultat démontré, démontrer que F_n ne peut être un nombre premier que si n est premier (sauf un exemple). Faire remarquer que le fait de savoir s'il y a une infinité de nombres premiers dans la suite de Fibonacci est encore une question non résolue.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Relation de divisibilité, preuve par induction. Entraînement au calcul littéral (consolidation).

Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	La partie de découverte de la conjecture sur des exemples tels $F_{3 =2}$ est indispensable pour la motivation de l'activité. Avant de passer à la preuve proprement dite une mise en commun des résultats et des conjectures est importantes. A ce moment, il est possible de suggérer l'idée de preuve par induction avec une suggestion du l'idée du lemme. Le calcul littéral avec des indices multiples est techniquement difficiles à maîtriser.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	La différence entre la contraposée et la réciproque.
Développements possibles et exercices de consolidation	Énoncer des réciproques et des contraposées à diverses propositions et voir la validité des énoncés. Se rendre compte que la contraposée est logiquement équivalent à la proposition, mais que ce n'est pas le cas pour la réciproque.

Les trente premiers termes de la suite de Fibonacci.

F_1	=	1	F_1	=	1
F_2	=	1	F_2	=	1
F_3	=	2	F_3	=	2
F_4	=	3	F_4	=	3
F_5	=	5	F_5	=	5
F_6	=	8	F_6	=	8
F_7	=	13	F_7	=	13
F_8	=	21	F_8	=	21
F_9	=	34	F_9	=	34
F_{10}	=	55	F_{10}	=	55
F_{11}	=	89	F_{11}	=	89
F_{12}	=	144	F_{12}	=	144
F_{13}	=	233	F_{13}	=	233
F_{14}	=	377	F_{14}	=	377
F_{15}	=	610	F_{15}	=	610
F_{16}	=	987	F_{16}	=	987
F_{17}	=	1597	F_{17}	=	1597
F_{18}	=	2584	F_{18}	=	2584
F_{19}	=	4181	F_{19}	=	4181
F_{20}	=	6765	F_{20}	=	6765
F_{21}	=	10946	F_{21}	=	10946
F_{22}	=	17711	F_{22}	=	17711
F_{23}	=	28657	F_{23}	=	28657
F_{24}	=	46368	F_{24}	=	46368
F_{25}	=	75025	F_{25}	=	75025
F_{26}	=	121393	F_{26}	=	121393
F_{27}	=	196418	F_{27}	=	196418
F_{28}	=	317811	F_{28}	=	317811
F_{29}	=	514229	F_{29}	=	514229
F_{30}	=	832040	F_{30}	=	832040

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

F_n divise F_{kn}.

Enjeux de l’activité

Découvrir une conjecture. Pratiquer la démonstration par induction. Voir la différence entre réciproque et contraposée.

Éléments de réponse

Soit au travers de l'activité « Qui divise qui? » soit à l'aide de la feuille annexe contenant le début de la suite des nombres de Fibonacci, découvrir que les nombres pairs (c'est-à-dire les multiples de 2 = F_3) sont les F_{3n}. Les multiples de 3 (= F_4) sont les F_{4n}. Les multiples de 5 (= F_5) sont les F_{5n}.
Ceci permet de découvrir et d'énoncer la conjecture qui affirme que pour n fixé, F_n divise F_{kn}.

En supposant la formule suivante
(*) $F_{j+n} = F_n \ F_{j+1} + F_{n-1} \ F_j$ pour j et n >1.
vérifiée, la preuve de la conjecture est la suivante :
Le premier pas de l'induction est trivial puisque pour tout n fixé, F_n divise F_n.
Pas d'induction.
Hypothèse d'induction : Pour tout j < k+1, F_n divise F_{jn}.
Conclusion : F_n divise $F_{(k+1)n}$.
Preuve : $F_{(k+1)n} = F_{k\,n+n} = F_n \ F_{kn+1} + F_{n-1} \ F_{kn}$ par la formule (*) avec j = kn.
Comme par hypothèse d'induction F_n divise F_{kn}, il existe un nombre entier M tel que $F_{kn} = M \ F_n$.
Ce qui implique que $F_{(k+1)n} = F_n \ F_{kn+1} + F_{n-1} \ F_{kn} = F_n \ (F_{kn+1} + M)$. Ce qui implique bien que F_n divise $F_{(k+1)n}$.

Reste à démontrer la formule (*).
Pour essayer de la faire découvrir aux élèves plutôt que de la donner directement (ce qui est très artificiel), il suffit de calculer
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$,
$F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1} = (F_{n+1} + F_n) + F_{n+1} = 2 F_{n+1} + F_n$,
$F_{n+4} = F_{n+3} + F_{n+2} = (2 F_{n+1} + F_n) + (F_{n+1} + F_n) = 3 F_{n+1} + 2 F_n$,
$F_{n+5} = F_{n+4} + F_{n+3} = (3 F_{n+1} + 2 F_n) + (2 F_{n+1} + F_n) = 5 F_{n+1} + 3 F_n$,
$F_{n+6} = F_{n+5} + F_{n+4} = (5 F_{n+1} + 3 F_n) + (3 F_{n+1} + 2 F_n) = 8 F_{n+1} + 5 F_n$,
or $1 = F_1 = F_2$, $2 = F_3$, $3= F_4$, $5 = F_5$, $8 = F_6$.
Ce qui devrait permettre de découvrir (*).

La preuve de (*) étant aussi une induction sur j, c'est aussi un exercice pour pratiquer l'induction.
Pour n fixé.
Le premier pas de l'induction est déjà fait avec $F_{n+2} = F_2 F_{n+1} + F_1 F_n$, (avec j =1 et F_1=1 et F_2 = 1).
Hypothèse d'induction : $F_{h+n} = F_n \ F_{h+1} + F_{n-1} \ F_h$ pour tout h < j+1
Conclusion : $F_{(j+1)+n} = F_n \ F_{j+2} + F_{n-1} \ F_{j+1}$.
Preuve du pas d'induction :

$F_{(j+1)+n} = F_{n+j} + F_{n+j-1} = (F_n \ F_{j+1} + F_{n-1} \ F_j) + (F_n \ F_{(j-1)+1} + F_{n-1} \ F_{j-1})$ (en utilisant 2 fois l'hypothèse)

$= F_n \ (F_{j+1} + F_j) + F_{n-1} \ (F_j + F_{j-1}) = F_n \ F_{j+2} + F_{n-1} \ F_{j+1}$.

Par le résultat démontré : F_n divise $F_{(k+1)n}$. On peut donc dire que
si M = pq alors F_M n'est pas premier (puisque F_p divise F_M). Ceci est vrai sauf pour M=4, car F_2=1.
La contraposée de ce dernier énoncé est que si F_M est premier, alors M est premier.
La réciproque qui dit : « Si M est premier alors F_M est premier » est fausse,

puisque F_{31} = 1346269 = 557 x 2417.
Il est intéressant de faire remarquer aux étudiants qu'on arrive là à une limite de nos connaissances, puisque l'on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers dans la suite de Fibonacci.

Exercices de consolidation

Pour certaines implications P, énoncer la réciproque et la contraposée et réaliser sur des exemples (ou par table de vérité) que si la contraposée est logiquement équivalente à P, ce n'est pas le cas pour la réciproque.

Concernant les relation de divisibilité de l'activité de découverte ou les manipulations algébriques sur des expressions littérales, il s'agit déjà d'exercices de consolidation de savoir-faire supposés connus.

SEMAINE DE L'ARITHMÉTIQUE

Titre de l'activité	Fraction continue.
Résumé de l'activité	En utilisant (sans le savoir) le développement en fraction continue du nombre d'or, montrer que les quotients de deux nombres de Fibonacci successifs tendent vers le nombre d'or.
Type d'activité	Calculatoire, pratique de l'utilisation de la machine, déduction
Degrés concernés	De 8 CO à 3 PO
Énoncé destiné aux élèves	Le but est d'arriver à calculer le nombre suivant : $$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\dots}}}}}}}}}$$ Tout d'abord par des approximations à la machine, ce qui permet de constater que numériquement les approximations convergent vers une certaine valeur, notée Φ. Calculer ces approximations successives sous forme de fractions irréductibles. Trouver une équation pour Φ. La résoudre.
Matériel	Papier, crayon, machine à calculer
Durée	2 ou 3 périodes
Propositions de déroulement	Au départ laisser les élèves essayer de calculer ce nombre à la machine.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Pratique du calcul de fractions, mise en équation et résolution de d'équation du deuxième degré.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Au début de l'activité, deux difficultés peuvent apparaître la première est d'ordre théorique, puisqu'il y a une infinité de calculs à faire. Les élèves ne sauront pas comment gérer les « ... » Ils devraient néanmoins réussir à imaginer de s'arrêter après un certain nombre de barres de fractions. La seconde d'ordre technique est d'arriver à calculer efficacement ces approximations successives avec une machine. En effet pour éviter des parenthésages successifs, il faut commencer par calculer le dernier dénominateur. Dans le deuxième exercice, il faut insister sur l'exigence d'obtenir une fraction.

Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	L'idée de suite et de limite.
Développements possibles	L'idée de fraction continue.
Liens interdisciplinaires	Histoire de l'art et de l'architecture.

Un calcul qui en vaut la peine.

Que peut bien valoir le nombre suivant?

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Exercice 1 :
Trouver un moyen de calculer efficacement avec votre machine de plus en plus « d'étages ».
Que remarquez-vous?

Exercice 2 :
Ramener sous forme de fractions les nombres obtenus en remplaçant ce qu'il y a après le premier « + »
par 0, puis faire de même avec le deuxième « + », puis avec le troisième, etc.

$$1+0=1 \qquad 1+\frac{1}{1+0}=2 \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+0}}=\frac{3}{2}$$

Calculer les 10 premiers termes. Que remarquez-vous?

Question subsidiaire : Qu'elle est la valeur du nombre remplacé par « 0 » à chaque étape?

Exercice 3 :
Notons $\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$

Pouvez-vous trouver, en vous aidant de l'exercice précédent, une équation que doit satisfaire Φ. Résoudre cette équation.

Un calcul qui en vaut la peine.

Exercice 1:
Que peut bien valoir le nombre obtenu par la recette suivante?

Premier pas : taper la touche

$\boxed{1}$

Deuxième pas : taper la suite de touches

$\boxed{1/x}$ $\boxed{+}$ $\boxed{1}$ $\boxed{=}$

Troisième pas : noter le résultat (mais sans l'effacer de la machine)

Répéter les deuxièmes et troisièmes pas.

Que remarquez-vous?

Donnez l'expression arithmétique, sans la simplifier, que vous venez de calculer à la machine après un pas, après deux pas, après trois pas.

Après avoir répéter une infinité de fois la recette, voilà le nombre qu'on a cherché à calculer~:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Exercice 2 :
Ramener sous forme de fractions les nombres obtenus en remplaçant ce qu'il y a après le premier ``+"
par 0, puis faire de même avec le deuxième ``+", puis avec le troisième, etc.

$$1+0=1 \qquad 1+\frac{1}{1+0}=2 \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+0}}=\frac{3}{2}$$

Calculer les 10 premiers termes. Que remarquez-vous?

Question subsidiaire : Qu'elle est la valeur du nombre remplacé par
``0" à chaque étape?

Exercice 3 :

$$\Phi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Pouvez-vous trouver, en vous aidant de l'exercice précédent, une équation que doit satisfaire Φ. Résoudre cette équation.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enjeux de l'activité :

Le but de cette page d'exercices est de faire découvrir un lien entre les nombres de Fibonacci et le nombre d'or. Plus précisément de permettre à l'élève de se convaincre, par des manipulations arithmétiques, que la limite du rapport entre deux nombres de Fibonacci successifs est égale au nombre d'or. Il est important d'avoir présenté auparavant la suite de Fibonacci ainsi que le nombre d'or soit par des activités introductives, soit par une présentation préalable pouvant contenir des informations non seulement mathématiques, mais aussi culturelles.

Éléments de réponses

Le but du premier exercice est de se convaincre numériquement que la suite obtenue en tronquant après un certain nombre d'étapes converge.

$x_1 = 1 + 0$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1+0}$, $x_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}$, $x_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}}$, … Cette suite converge.

L'exemple ci-dessus est un exemple de troncature, c'est-à-dire le fait de remplacer la fin d'une expression arithmétique par zéro.

Pour ce faire, il faut être capable d'employer sa machine efficacement pour calculer ces approximations.

Une alternative : La deuxième feuille de données est une entrée alternative dans le problème.
On a remplacé l'exercice 1 par un exercice inversé.
Le but de cet exercice est de faire découvrir à l'élève la fraction continue

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

Dans cette approche alternative, il est impératif de mettre en commun le travail des élèves après le premier exercice pour pouvoir dégager la formule précédente avant de commencer les exercices 2 et 3.
Il faut aussi faire apparaître le fait que les calculs faits sur machine approchent le nombre en question.

Le deuxième exercice doit permettre de voir que les troncatures successives sont des quotients de nombres de Fibonacci successifs par calcul (on peut même le démontrer avec des élèves plus âgés en faisant une induction plus ou moins formelle).
Essayer de faire remarquer qu'il n'est pas nécessaire de refaire tous les calculs à chaque pas.
En effet ce que l'on trouve sous la première barre de fraction est exactement le terme que l'on a calculé précédemment. Si

Proposition d'activité Semaine des maths Version du 15 juillet 05

$x_1 = 1 + 0$, $x_2 = 1 + \frac{1}{1+0}$, $x_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}$, $x_4 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}}$, $x_5 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1+0}}}}$, …

On peut remarquer que

$x_1 = 1 + 0$, $x_2 = 1 + \frac{1}{x_1}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{x_2}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{x_3}$, $x_5 = 1 + \frac{1}{x_4}$, …

En faisant les calculs on obtient

$x_1 = 1 = \frac{1}{1}$, $x_2 = 2 = \frac{2}{1}$, $x_3 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $x_4 = 1 + \frac{1}{x_3} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$, $x_5 = 1 + \frac{1}{x_4} = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$, …

On remarque que x_i est le quotient de F_{i+1} par F_i.

La preuve de cette remarque se fait par induction, puisque, par hypothèse d'induction, $x_n = \frac{F_{n+1}}{F_n}$

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n} = 1 + \frac{F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+1} + F_n}{F_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}.$$

La question subsidiaire est là pour faire prendre conscience que la partie négligée est toujours la même et est égale au nombre cherché.

En utilisant la même idée que celle des calculs réutilisables du deuxième exercice ainsi que la réponse à la question subsidiaire, le troisième exercice permet d'arriver à la formule $\Phi = 1 + 1/\Phi$ et de résoudre cette équation.
La question intermédiaire
En multipliant par on obtient l'équation $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, qui est l'équation dont les deux solutions sont

$$\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Reste à mettre les choses ensemble : Le nombre représenté Φ par l'expression de départ est égal à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, puisque $\Phi > 1$, la nième troncature de l'expression de départ est égale à $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ et numériquement on voit que ces troncatures tendent vers Φ.
Un seul point resterait à développer : peut-on montrer la convergence facilement? Une preuve de cela est donnée dans l'activité « limite de F_{n+1} / F_n ». Néanmoins une preuve formelle de la convergence de cette suite n'est pas utile à ce niveau.

Cela peut déboucher sur une explication sur la notion de fractions continues.
Rappelons brièvement ce qu'est une fraction continue.
Pour cela rappelons deux notations.
Pour un nombre positif s, notons [s] le plus grand entier plus petit que s et {s} la partie fractionnaire de s.
Par exemple pour s = 2,345, [s] = 2 et {s} = 0,345.
Il est clair que s = [s] + {s}. De plus dans le cas où s est une fraction s = p/q, [s] est le résultat de la division entière de p par q et {s} est le reste de cette même division entière.

On appelle fraction continue d'un nombre s l'expression finie ou infinie obtenue par le procédé suivant :
Comme s = [s] + {s} et que $0 \leq \{s\} < 1$, si {s} = 0, on s'arrête, sinon on peut écrire $s = [s] + 1/\{s\}^{-1}$ avec maintenant $1/\{s\}^{-1} > 1$. On peut donc répéter pour $1/\{s\}^{-1}$ la même décomposition $1/\{s\}^{-1} = [1/\{s\}^{-1}] + \{1/\{s\}^{-1}\}$.
$s = [s] + 1/([\{s\}^{-1}] + \{1/\{s\}^{-1}\})$ avec à nouveau $0 \leq \{1/\{s\}^{-1}\} < 1$. Rien n'empêche de continuer ce procédé tant que la partie fractionnaire obtenue au pas précédent est non nulle.
Exemples : 96/67 = 1 + 29/67 = 1 + 1/(67/29) = 1 + 1/(2+9/29) = 1 + 1/(2+1/(29/9)) = 1+1/(2+1/(3+2/9))

$= 1 + 1/(2+1/(3+1/(9/2\ ))) = 1 + 1/(2+1/(3+1/(4 + 1/2\ )))$; on obtient donc

$$\frac{96}{67} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}}$$

Pour 2,345 on obtient :

$2{,}345 = 2 + 0{,}345 = 2 + 1/(1000/345\ ) = 2 + 1/(2 + 310/\ 345\ ) = 2 + 1/(2 + 1/\ (345/\ 310\ ))$
$= 2 + 1/(2 + 1/\ (1 + 35/\ 310\ )) = 2 + 1/(2 + 1/\ (1 + 1/(310/\ 35))) = 2 + 1/(2 + 1/\ (1 + 1/(\ 8 + 30/\ 35)))$
$= 2 + 1/(2 + 1/\ (1 + 1/(\ 8 + 1/(35/\ 30)))) = 2 + 1/(2 + 1/\ (1 + 1/(\ 8 + 1/(1 + 5/\ 30))))$
$= 2 + 1/(2 + 1/\ (1 + 1/(\ 8 + 1/(1 + 1/\ 6))))$.

Il est assez facile de voir que ce procédé se termine après un nombre fini d'étapes si et seulement si le nombre dont on est parti est une fraction.

Dans le cas de $1 < \Phi < 2$, sa décomposition en fraction continue est

$\Phi = [\Phi] + \{\Phi\} = 1 + (\Phi-1) = 1 + 1/(\Phi-1)^{-1} = 1 + 1/(\Phi^{-1})^{-1} = 1 + 1/\Phi$; puisque $\Phi-1 = 1/\Phi$.

En réitérant ce calcul, on obtient bien l'expression

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cdots}}}}}}}}}$$

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	Spirale
Résumé de l'activité	En partageant la classe en deux groupes inégaux découverte de la spirale.
Type d'activité	Construction à la règle et au compas.
Degrés concernés	5P-PO
Enoncé destiné aux élèves	***Activité 1 (deux tiers des élèves)*** Dessine avec le logiciel un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder. [Note ses dimensions.] Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré qui a deux sommets communs avec le rectangle. [Note les dimensions de ces deux figures.] En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré. Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux [dans la mesure du possible, trace le nouveau carré de manière à ce que le quart de cercle qui sera tracé à l'intérieur de ce carré prolonge le(s) quart(s) de cercles précédents. ***Activité 2 (un tiers des élèves)*** Dessine avec le logiciel un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm. Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible. Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle. [Note les dimensions de ces deux figures.] En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré. Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux [dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents].
Matériel	Règle et compas. (Eventuellement, équerre.)
Durée	90 min

Propositions de déroulement	Demander aux élèves d'établir, pour chacune des étapes, un tableau avec : - les dimensions du rectangle, - les dimensions du carré, - l'aire du rectangle et celle du carré, - le rapport entre l'aire du rectangle et celle du carré. Comparer les rapports obtenus et faire le lien avec le rapport d'or. Parler de la suite de Fibonacci.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Mesurer : Reporter de longueurs. Tracer des perpendiculaires. Reporter des valeurs dans un tableau. Calcul d'aire. Suites numériques. Construction et raisonnement par récurrence.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Selon les dimensions choisies pour l'activité 1, il y a un risque que celles-ci induisent une fin rapide des itérations possibles (par exemple si la longueur du rectangle est le double de la largeur). Dans ce cas, demander à l'élève de recommencer avec d'autres dimensions. Les deux tâches sont complémentaires, l'activité 1 pour enrichir le débat par des résultats variés et l'activité 2 pour introduire la phase d'institutionnalisation.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Figures géométriques. Rapports. Limites.
Développements possibles	Recherche du rapport entre deux termes successifs (rapport d'or). Spirale de Fibonacci. Calcul de la limite des rapports. Recherche de la forme algébrique de la suite de Fibonacci.
Liens interdisciplinaires	Histoire des sciences et des arts. Sciences naturelles.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enoncé *Activité 1 Spirale*

Sur une feuille A4, dessine un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder.
[Mesure et note ses dimensions.]

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, tracer le nouveau carré de manière à pouvoir prolonger les quarts de cercles précédents.]

Enoncé *Activité 2 Spirale*

Dessine un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm.

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, tracer le nouveau carré de manière à pouvoir prolonger les quarts de cercles précédents.]

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Enoncé ***Activité 1 Spirale***

Sur une feuille A4, dessine un grand rectangle qui te paraisse agréable à regarder.
[Mesure et note ses dimensions.]

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents.]

Enoncé ***Activité 2 Spirale***

Dessine un rectangle de 27.5 cm sur 17 cm.

Dans ce rectangle, dessine le plus grand carré possible.
Tu as maintenant un carré et un nouveau rectangle.
[Mesure et note les dimensions de ces deux figures.]

En prenant comme centre un des sommets du carré situé sur un des côtés du rectangle et comme rayon le côté du carré, trace un quart de cercle à l'intérieur du carré.

Dans le nouveau rectangle, recommence les manipulations ci-dessus aussi longtemps que tu le peux. [Dans la mesure du possible, trace le nouveau quart de cercle de manière à ce qu'il soit dans le prolongement des quarts de cercles précédents.]

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Spirales avec le logiciel cabri ou construction à la règle et au compas.

Enjeux de l'activité

Activité 1

Cette activité vise :

- à recenser les dimensions jugées "idéales" par les élèves qui traitent l'activité 1,
- à constater que, selon les dimensions choisies, la tâche à effectuer ne permet pas de tracer une spirale.

Activité 2

Pour aboutir au résultat attendu, cette activité demande de la précision (mesure et compas). Elle a pour principal objectif de servir de référence dans le débat qui suivra.

Débat

Un débat sur le sens du beau et de l'harmonieux pourrait initier l'approche mathématique du rapport d'or. (*Si l'enseignant se sent à l'aise sur le sujet, une présentation des critères mythiques qui ont prévalu à l'élaboration de nombreuses œuvres d'art sera certainement une digression qui servira à motiver encore mieux les élèves dans la suite de la phase d'institutionnalisation.)*

Dans un deuxième temps, il est nécessaire de faire émerger, qu'en partant de "l'intérieur", si l'on veut construire une spirale avec des quarts de cercle, une des constructions possibles[1] (*celle qui se rapproche le plus de la spirale logarithmique*) suit la règle de construction suivante :

Pour : R_1, rayon du premier quart de cercle, R_2, rayon du deuxième quart de cercle,
R_3, rayon du troisième quart de cercle, …, R_n , rayon du n-ième quart de cercle.

On a :

$R_1 = R_2$ et $R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$

(C'est-à-dire : $R_3 = R_2 + R_1$; $R_4 = R_3 + R_2$; …)

Par la suite, l'enseignant montrera que le rapport entre les côtés du rectangle donné est proche du nombre d'or (rapport d'or) :

$$\frac{27{,}5}{17} \cong 1{,}61765 \quad \text{et} \quad \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803$$

Il pourra également comparer les différents rapports "choisis" par les élèves de l'activité 1, voire le rapport moyen, avec le nombre ϕ.

Enjeux annexes

Activité 1 : Entraîner le maniement de la règle et du compas.

Activité 2 : Entraîner les constructions avec Cabi-géomètre.

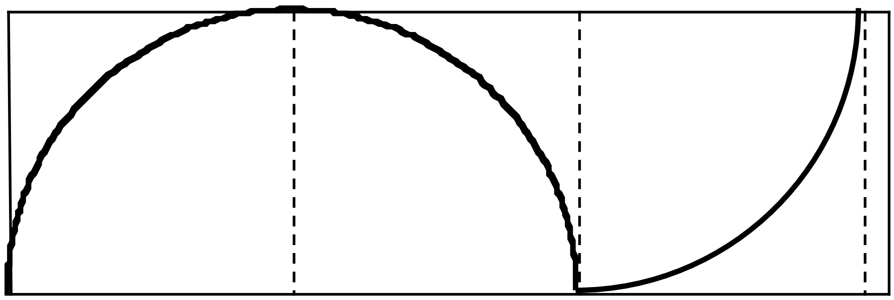
Activité 1&2 : Construction d'un tableau des valeurs et calcul de rapports.

[1] Autre construction possible à la fin de ce document.

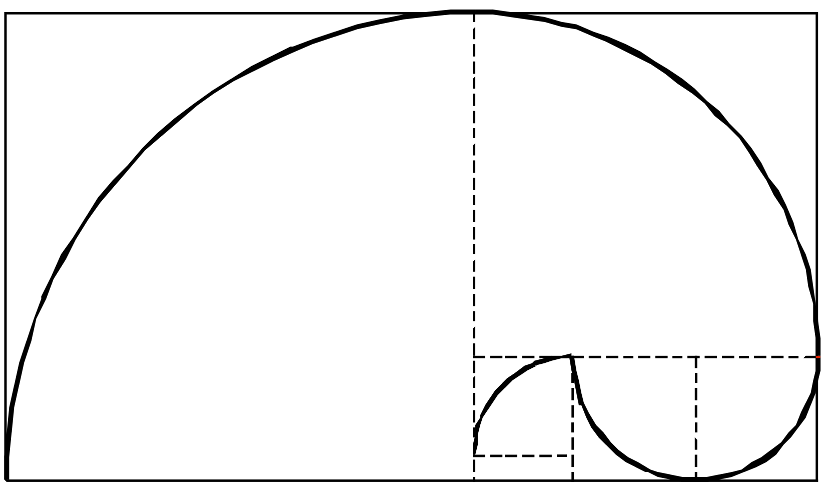
Eléments de réponse : constructions possibles.

Activité 1

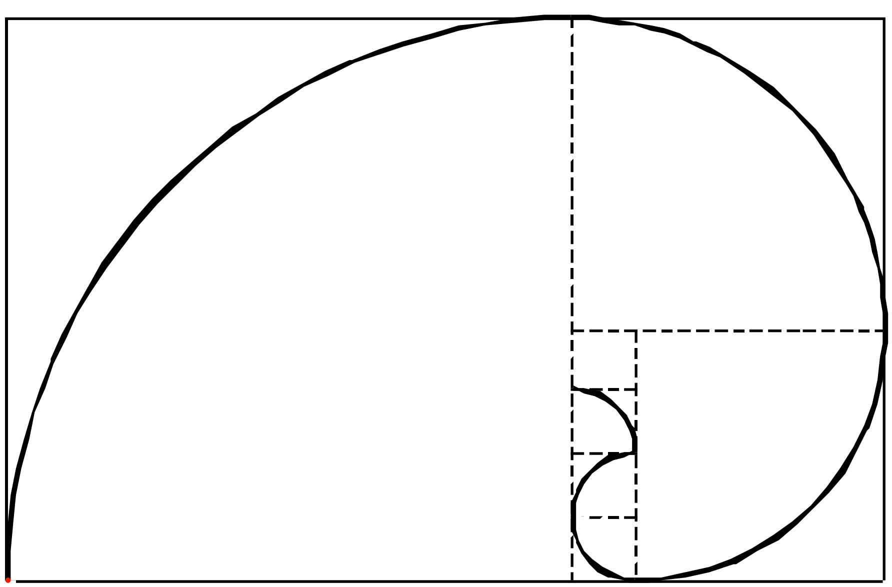
Cas : rapport longueur / hauteur >> 1,618



Cas : rapport longueur / hauteur > 1,618



Cas : rapport longueur / hauteur < 1,618



SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Titre de l'activité	**Découverte de la suite de Fibonacci** ou *cinq activités à traiter simultanément* : **les billes, les escaliers, les étages peints, les faux-bourdons, les lapins** (ce dernier étant le problème posé par Fibonacci il y a environ 800 ans).
Résumé de l'activité	Ces 5 activités, qu'il est conseillé de faire résoudre en classe en parallèle par 5 groupes d'élèves, font apparaître la suite de Fibonacci à partir de 5 situations différentes, lui conférant ainsi son caractère magique. Elles sont aussi une introduction aux activités portant plus spécifiquement sur les propriétés de la suite de Fibonacci, justifiant ainsi l'étude de cette suite.
Type d'activité	Activité initiale de découverte.
Degrés concernés	5P – PO
Enoncés destiné aux élèves	1. <u>Les billes</u> Douze élèves attendent devant la classe en file indienne. Un grand sac de billes se trouve à l'entrée de la classe. Le premier élève reçoit une bille. Au moment d'entrer en classe, chaque élève prend dans le sac des billes pour en donner autant qu'il en possède à ses deux suivants. Cela signifie que le premier élève donne une bille à chacun des deux suivants. Le 2ème, qui en a maintenant une, en donne donc une au 3ème et au 4ème. Le 3ème, qui en a deux, en donne deux au 4ème et deux au 5ème, etc. Quel sera le nombre de billes reçues par chacun des élèves ? En particulier par le 1ère, le 2ème, le 3ème, le 4ème, le 5ème, le 6ème ……… et le dernier ?
	2. <u>Les escaliers</u> En montant des escaliers je peux monter : - une marche à la fois, - deux marches à la fois. En devant obligatoirement poser le pied sur la première marche, de combien de façons puis-je monter un escalier composé d'une marche, de deux marches, de trois marches, de quatre marches, de cinq marches, ……, de douze marches ?

	3. <u>Les étages peints</u> Dans ma ville, il y a une rue spéciale dans laquelle - le 1er immeuble a 1 étage, - le 2ème immeuble a 2 étages, - le 3ème immeuble a 3 étages et ainsi de suite. Le maire décide de faire repeindre, étage par étage, les immeubles de cette rue en jaune et en bleu en respectant les deux conditions ci-dessous : • Le 1er étage de chaque immeuble doit être bleu. • On ne doit pas avoir 2 étages bleus qui se suivent. De combien de manières différentes peut-on peindre le 1er, le 2ème, le 3ème, le 4ème , le 5ème., le 6ème ………, le 12ème immeuble ?
	4. <u>Les faux-bourdons</u> ***Indication*** **La reproduction chez les abeilles** La population des abeilles comporte trois sortes d'individus : - La reine, seule femelle féconde. - Les faux-bourdons, qui sont les mâles. - Les ouvrières, qui sont des femelles stériles. La reine s'accouple au printemps avec des faux-bourdons et a ensuite la faculté de pondre deux sortes d'œufs : - Des œufs fécondés d'où naîtront des femelles, ouvrières ou reine - Des œufs non fécondés d'où naîtront des faux-bourdons. On peut en conclure que les abeilles femelles ont deux parents, alors que les faux-bourdons n'ont pas de père ! ***Question*** Avec les informations ci-dessus, trouver le nombre maximum des ascendants d'un faux-bourdon à la 1ère, 2ème, 3ème, 4ème, 5ème et 6ème , ……… et 12ème génération ?
	5. <u>Les lapins</u> ***Énoncé historique*** " Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ? " ***Énoncé actualisé*** Sachant que, dès que les deux lapins d'un couple sont âgés de deux mois, ce couple engendre un nouveau couple de lapins chaque mois, trouver combien il y aura de couples de lapins au bout d'une année. ***Question*** En partant d'un couple né début janvier, déterminer le nombre de couples de lapins qu'il y aura en janvier, février, mars, avril, mai, juin, …… et décembre.

Matériel	Des billes (ou des jetons) en nombre suffisant (environ 400) ; papier, crayons de couleurs différentes, (éventuellement tableau des escaliers annexé et tableau des immeubles annexé)
Durée	En 5P-6P, 2x45' ; après :45'
Proposition de déroulement	Il est conseillé d'utiliser ces 5 activités en simultané. S'arranger pour que chaque activité soit traitée par un nombre d'élèves le plus égal possible. 1. Les billes Travail individuel ou à deux. Vérifier la compréhension de l'énoncé. Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de billes reçues par chacun des élèves. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de billes par la méthode choisie pour les six premiers élèves ou en remplissant un tableau. Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.
	2. Les escaliers Travail individuel ou à deux. Eventuellement, donner aux élèves des feuilles avec les escaliers à monter. Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de manières de monter des escaliers de six à douze marches sans représentation. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de manières par la méthode choisie pour les six premiers escaliers ou en remplissant un tableau. Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre le nombre de marches des escaliers et le nombre de manières différentes de les monter. Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.
	3. Les étages peints Travail individuel ou à deux. Eventuellement, donner aux élèves des feuilles avec des immeubles à colorier Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de couleurs pour les immeubles de 6 à 12 étages sans coloriage. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de couleurs par coloriage ou en remplissant un

	tableau. Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre le nombre d'étages et le nombre de manières différentes de peindre l'immeuble. Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.
	4. <u>Les faux-bourdons</u> Travail individuel ou à deux. Proposer aux élèves de dessiner l'arbre généalogique d'un faux-bourdon. Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre d'ascendants entre la 6ème et 12ème génération sans arbre ou sans dessin. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre d'ascendants avec l'arbre généalogique ou en remplissant un tableau. Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre la génération et nombre d'ancêtres. Faire le lien avec les autres recherches et présenter la suite de Fibonacci.
	5. <u>Les lapins</u> Travail individuel ou à deux. Vérifier la compréhension de l'énoncé historique. Proposer aux élèves d'illustrer le problème en représentant les couples de lapins non matures (âgés d'un mois) en bleu et les matures (âgés de plus d'un mois) en rouge dans un arbre de classement. [On peut également suggérer aux élèves d'effectuer l'arbre de classement avec les lettres "N" et "M".] Demander aux élèves de remplir un tableau qui donne la correspondance entre le mois de l'année et le nombre de lapins pour les six premiers mois de l'année. Tenter de faire découvrir une règle de calcul qui permet de trouver le nombre de lapins pour les mois de juillet à décembre sans l'arbre de classement. Si certains élèves ne trouvent pas de règle, les laisser chercher le nombre de couples de lapins en fin d'année avec l'arbre ou le tableau. Faire le lien avec les autres recherches, présenter la suite de Fibonacci et replacer ce problème dans son contexte historique.
Références aux contenus d'enseignement, plans	Arbres de classement. (5P-6P) Représentations tabulaires. (5P-6P)

d'études et moyens d'enseignement	Suites numériques. (CO - PO) Construction et raisonnement par récurrence. (5P – PO) Calcul littéral et résolution d'équation. (CO – PO)
Analyse préalable de l'activité	Les cinq activités sont complémentaires. Aboutissant toutes à la même suite, la suite de Fibonacci, le côté mystérieux de ce constat devrait induire un intérêt des élèves pour l'étude des particularités de cette suite.
Notions mathématiques susceptibles d'être mises en évidence	Récurrence. Suites numériques Fonction dans **N**
Développements possibles	Recherche du rapport entre deux termes successifs (rapport d'or). Calcul de la limite de ce rapport. Recherche de la forme algébrique (Binet) des termes de la suite de Fibonacci.
Liens interdisciplinaires	Histoire des sciences et des arts. Sciences naturelles.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Découverte de la suite de Fibonacci

Enoncé *Activité 1 : Les billes*

Douze élèves attendent devant la classe en file indienne.
Un grand sac de billes se trouve à l'entrée de la classe.
Le premier élève reçoit une bille.
Au moment d'entrer en classe, chaque élève prend dans le sac des billes pour en donner autant qu'il en possède à ses deux suivants.
Cela signifie que le premier élève donne une bille à chacun des deux suivants. Le 2ème, qui en a maintenant une, en donne donc une au 3ème et au 4ème. Le 3ème, qui en a deux, en donne deux au 4ème et deux au 5ème, etc. Quel sera le nombre de billes reçues par chacun des élèves ? En particulier par le 1ère, le 2ème, le 3ème, le 4ème, le 5ème, le 6ème ……… et le dernier ?

Enoncé *Activité 2 : Les escaliers*

En montant des escaliers je peux monter :

- une marche à la fois,
- deux marches à la fois.

En devant obligatoirement poser le pied sur la première marche, de combien de façons puis-je monter un escalier composé d'une marche, de deux marches, de trois marches, de quatre marches, de cinq marches, ……, de douze marches ?

Enoncé *Activité 3 : Les étages peints.*

Dans ma ville, il y a une rue spéciale dans laquelle

- le 1^{er} immeuble a 1 étage,
- le $2^{ème}$ immeuble a 2 étages,
- le $3^{ème}$ immeuble a 3 étages et ainsi de suite.

Le maire décide de faire repeindre, étage par étage, les immeubles de cette rue en jaune et en bleu en respectant les deux conditions ci-dessous :

- Le 1^{er} étage de chaque immeuble doit être bleu.
- On ne doit pas avoir 2 étages bleus qui se suivent.

De combien de manières différentes peut-on peindre le 1^{er}, le $2^{ème}$, le $3^{ème}$, le $4^{ème}$, le $5^{ème}$, le $6^{ème}$, ………, le $12^{ème}$ immeuble ?

Enoncé *Activité 4 : Les faux-bourdons*

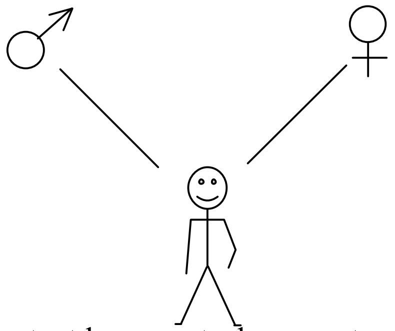
Indications

L'arbre généalogique

Un arbre généalogique ascendant représente tous les ancêtres d'un individu.
On place cet individu au bas de la feuille, et on dessine les deux branches qui le relient à ses parents. Les parents sont représentés selon leur sexe :

pour le père ♂

pour la mère ♀



On continue l'arbre en représentant les parents des parents, et ainsi de suite.
(Toutes les personnes d'une même génération sont dessinées au même niveau).

La reproduction chez les abeilles

La population des abeilles comporte trois sortes d'individus :
- La reine, seule femelle féconde.
- Les faux-bourdons, qui sont les mâles.
- Les ouvrières, qui sont des femelles stériles.

La reine s'accouple au printemps avec des faux-bourdons et a ensuite la faculté de pondre deux sortes d'œufs :
- Des œufs fécondés d'où naîtront des femelles, reine ou ouvrières.
- Des œufs non fécondés d'où naîtront des faux-bourdons.

On peut en conclure que les abeilles femelles ont deux parents, alors que les faux-bourdons n'ont pas de père !

Question

Avec les informations ci-dessus, trouver le nombre maximum des ascendants d'un faux-bourdon à la 1$^{\text{ère}}$, 2$^{\text{ème}}$, 3$^{\text{ème}}$, 4$^{\text{ème}}$, 5$^{\text{ème}}$ et 6$^{\text{ème}}$, ……… et 12$^{\text{ème}}$ génération ?

Indication

Le dessin de l'arbre généalogique peut aider à répondre aux questions précédentes.

Enoncé *Activité 5 : Les lapins de Fibonacci*

Énoncé du XII^{e} Siècle

> *" Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin d'une année si, commençant avec un couple, chacun des couples produit chaque mois un nouveau couple, lequel devient productif au second mois de son existence ? "*

Énoncé actualisé

Si, dès que les deux lapins d'un couple sont âgés de deux mois, ce couple engendre chaque mois un nouveau couple de lapins, trouver combien il y aura de couples de lapins au bout d'une année.

Indication : en partant d'un couple né début janvier, déterminer le nombre de couples de lapins qu'il y aura en janvier, février, mars, avril, mai, juin, …… et décembre.

SEMAINE DES MATHEMATIQUES

Découverte de la suite de Fibonacci ou *cinq activités à traiter simultanément :* les billes, les escaliers, les étages peints, les faux-bourdons, les lapins.

Enjeux de l'activité

Aboutissant toutes à la même suite, la suite de Fibonacci, le côté mystérieux de ce constat devrait induire un intérêt des élèves pour l'étude des particularités de cette suite.

Pour chacun des problèmes, la recherche des termes de la "suite solution" demande la compréhension d'un énoncé qui présente une situation peu commune et son appropriation (modélisation) par l'élève.
Pour son appropriation, s'il est naturel de commencer par des illustrations (dessins, schémas, arbres, tableaux, …), à partir du $5^{ème}$, $6^{ème}$ ou $7^{ème}$ terme, l'objectif est d'amener l'élève vers un raisonnement itératif et la recherche d'une règle de calcul récurrente.

Le côté mystérieux d'un résultat identique pour chacune des cinq situations, situations qui semblent, a priori, n'avoir rien en commun, devrait permettre à l'enseignant de présenter différents exemples dans lesquels la suite de Fibonacci (ou la spirale liée) apparaissent.

Eléments de réponse et indications pour ces problèmes.

Les billes

E1 Le 1^{er} élève reçoit une bille,
il en a une et en donne donc une au $2^{ème}$ et au $3^{ème}$.

E2 Le $2^{ème}$ élève a reçu une bille du 1^{er},
il en a une et en donne donc une au $3^{ème}$ et au $4^{ème}$.

E3 Le $3^{ème}$ élève a reçu une bille du 1^{er} et une du $2^{ème}$,
il en a deux et en donne donc deux au $4^{ème}$ et au $5^{ème}$.

E4 Le $4^{ème}$ élève a reçu une bille du 2^{er} et deux du $3^{ème}$,
il en a trois et en donne donc trois au $5^{ème}$ et au $6^{ème}$.

E5 Le $5^{ème}$ élève a reçu deux billes du 3^{er} et trois du $4^{ème}$,
il en a cinq et en donne donc cinq au $6^{ème}$ et au $7^{ème}$.

E6 Le $6^{ème}$ élève a reçu trois billes du 4^{er} et cinq du $5^{ème}$,
il en a huit et en donne donc trois au $7^{ème}$ et au $8^{ème}$.

En remarquant que chaque terme est égal à la somme des deux précédents, on peut calculer :

E7 E7 = E6 + E5 = 8 + 5 = 13

E8 E8 = E7 + E6 = 13 + 8 = 21

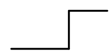
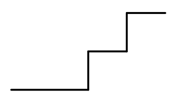
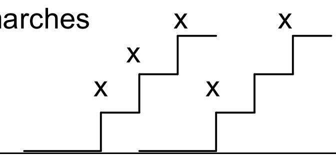
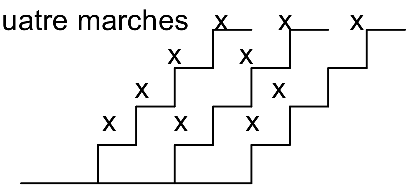
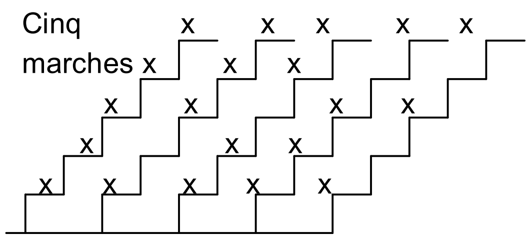
E9 E9 = E8 + E7 = 13 + 21 = 34

E10 E10 = E9 + E8 = 21 + 34 = 55

E11 E11 = E10 + E9 = 34 + 55 = 89

E12 E12 = E11 + E10 = 89 + 55 = 144

Les escaliers

Une seule marche 	E1 Il n'y a qu'**une** seule manière de monter un escalier d'une seule marche.
Deux marches 	E2 S'il faut poser le pied sur la première marche, il n'y a qu'**une** seule manière de monter un escalier de deux marches.
Trois marches 	E3 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **deux** manières de monter un escalier de trois marches. M1-M2-M3 ou M1-M3
Quatre marches 	E4 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **trois** manières de monter un escalier de deux marches. M1-M2-M3-M4 ou M1-M3-M4 ou M1-M2-M4
Cinq marches 	E5 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **cinq** manières de monter un escalier de deux marches. M1-M2-M3-M4-M5 ou M1-M3-M4-M5 ou M1-M2-M4-M5 ou M1-M2-M3-M5 ou M1-M3-M5

Six marches

1. L'illustration avec des marches devenant compliquée, si l'on veut continuer à résoudre ce problème par observation, on suggère de changer la modalité de représentation et de passer par une illustration des marches par un quadrillage.

   Exemple :

	M1	M2	M3	M4	M5	M6
1èr possibilité	x	x	x	x	x	x
2ème possibilité	x		x	x	x	x
3ème possibilité	x	x		x	x	x
4ème possibilité	x	x	x		x	x
5ème possibilité	x	x	x	x		x
6ème possibilité	x		x		x	x
7ème possibilité	x	x		x		x
8ème possibilité	x		x	x		x

2. En étant un peu observateur, on peut remarquer que pour monter cinq marches on a comme alternative de poser le pied sur la quatrième marche puis de monter d'une marche ou de ne pas poser le pied sur la quatrième marche (le poser sur la troisième) puis de monter de deux marches à la fois.
   On a donc obtenu la liste des manières de monter cinq marches en ajoutant un "M5" aux listes de trois et quatre marches.

   Pour celle de six marches, on peut, en partant des deux précédentes, écrire
   Cinq marches et "M6" : M1-M2-M3-M4-M5-M6 ou M1-M3-M4-M5-M6 ou M1-M2-M4-M5-M6 ou M1-M2-M3-M5-M6 ou M1-M3-M5-M6 ou
   Quatre marches et "M6" : M1-M2-M3-M4-M6 ou M1-M3-M4-M6 ou M1-M2-M4-M6

   On a donc :

   E6 S'il faut poser le pied sur la première marche, il y a **huit** manières de monter un escalier de six marches.

   On voit alors que chaque terme est égal à la somme des deux précédents et l'on calcule directement les termes suivant en posant :

   E7 E7 = E6 + E5 = 8 + 5 = 13

   E8 E8 = E7 + E6 = 13 + 8 = 21

   E9 E9 = E8 + E7 = 13 + 21 = 34

   E10 E10 = E9 + E8 = 21 + 34 = 55

   E11 E11 = E10 + E9 = 34 + 55 = 89

   E12 E12 = E11 + E10 = 89 + 55 = 144

Les étages peints

E1 Le 1^{er} étage doit être bleu, il n'y a donc qu'**une** manière de peindre un immeuble d'un étage.

E2 Le 1^{er} étage doit être bleu et le second ne pouvant pas être bleu, il n'y a qu'**une** manière de peindre un immeuble de deux étages.

E3 Il y a **deux** manières de peindre un immeuble de trois étages.

$3^{ème}$ étage	J	B
$2^{ème}$ étage	J	J
1^{er} étage	B	B

E4 Il y a **trois** manières de peindre un immeuble de quatre étages.

$4^{ème}$ étage	J	B	J
$3^{ème}$ étage	J	J	B
$2^{ème}$ étage	J	J	J
1^{er} étage	B	B	B

E5 Il y a **cinq** manières de peindre un immeuble de cinq étages.

5ème étage	B	J	J	B	J
4ème étage	J	B	J	J	J
3ème étage	B	J	B	J	J
2ème étage	J	J	J	J	J
1er étage	B	B	B	B	B

E6 Il y a **huit** manières de peindre un immeuble de six étages.

6ème étage	J	J	J	J	B	J	B	B
5ème étage	J	J	J	B	J	B	J	J
4ème étage	J	J	B	J	J	J	J	B
3ème étage	J	B	J	J	J	B	B	J
2ème étage	J	J	J	J	J	J	J	J
1er étage	B	B	B	B	B	B	B	B

On voit alors que chaque terme est égal à la somme des deux précédents et l'on calcule directement les termes suivant en posant :

E7 E7 = E6 + E5 = 8 + 5 = 13

E8 E8 = E7 + E6 = 13 + 8 = 21

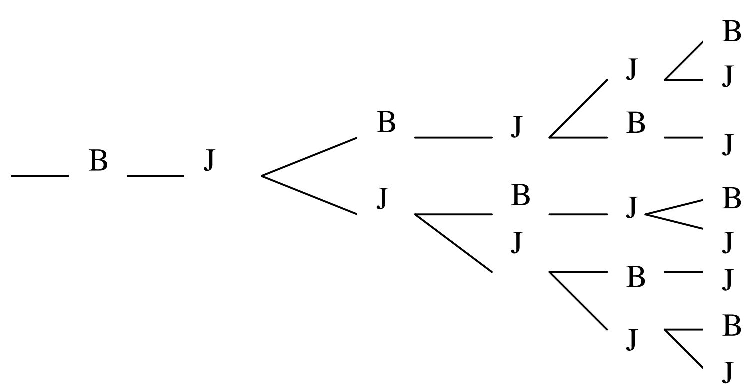
E9 E9 = E8 + E7 = 13 + 21 = 34

E10 E10 = E9 + E8 = 21 + 34 = 55

E11 E11 = E10 + E9 = 34 + 55 = 89

E12 E12 = E11 + E10 = 89 + 55 = 144

Autre présentation : arbre de classement



Suite : 1 1 2 3 5 8

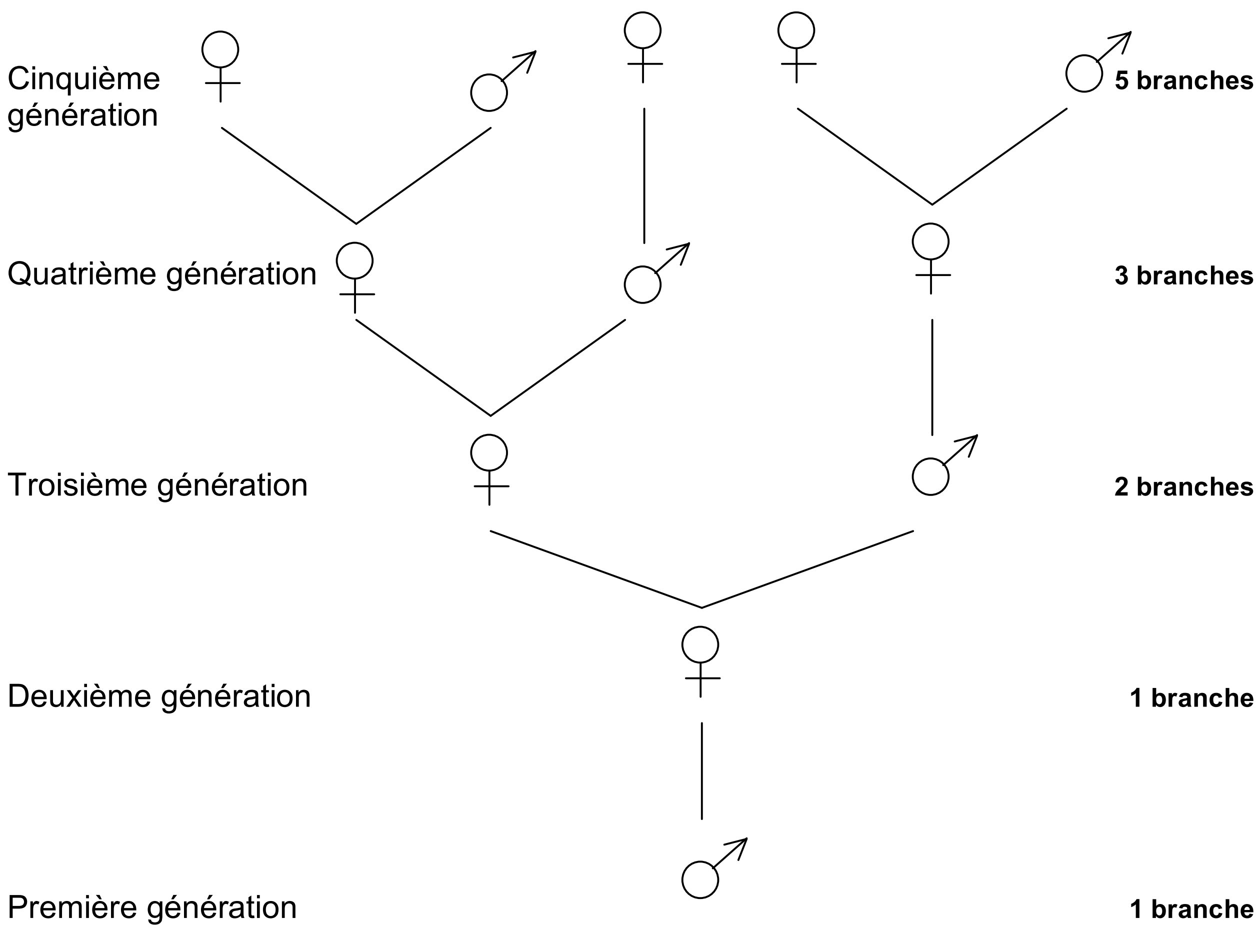
Les faux-bourdons

A1 L'arbre généalogique ne contient qu'un individu : « le faux-bourdon ».
Il a donc **une** seule branche.

A2 Le faux-bourdon n'ayant qu'une mère : « une reine », l'arbre généalogique n'a toujours qu'**une** seule branche.

A3 La reine ayant un père : « un faux-bourdon » et une mère : « une reine », l'arbre généalogique a maintenant **deux** branches.

Dès que l'on a compris ce mode de procréation (chaque faux-bourdon [mâle] a un ascendant et chaque reine [femelle] a deux ascendants directs), on peut établir l'arbre généalogique ci-dessous :



En observant l'arbre ci-dessus, voire en le complétant encore pour quelques-unes des générations précédentes, on constate que le nombre de branches pour une génération fixée est égal à la somme de branches des deux générations précédentes.
C'est-à-dire que : $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$

On a alors la suite :

$A_1 = 1$; $A_2 = 1$; $A_3 = 2$; $A_4 = 3$; $A_5 = 5$; $A_6 = 8$; $A_7 = 13$; $A_8 = 21$; $A_9 = 34$; $A_{10} = 55$; $A_{11} = 89$; $A_{12} = 144$

Remarque : ce problème est fortement simplifié par rapport à la réalité. En situation réelle, certains individus de ce tableau peuvent être le même, ce qui implique que le tableau donne un nombre maximum d'ascendants.

De plus, un faux bourdon est considéré du point de vue génétique comme le frère de la reine qui l'a pondu.

Les lapins

L1 Naissance du premier couple de lapins. On a donc **un** couple de lapins.

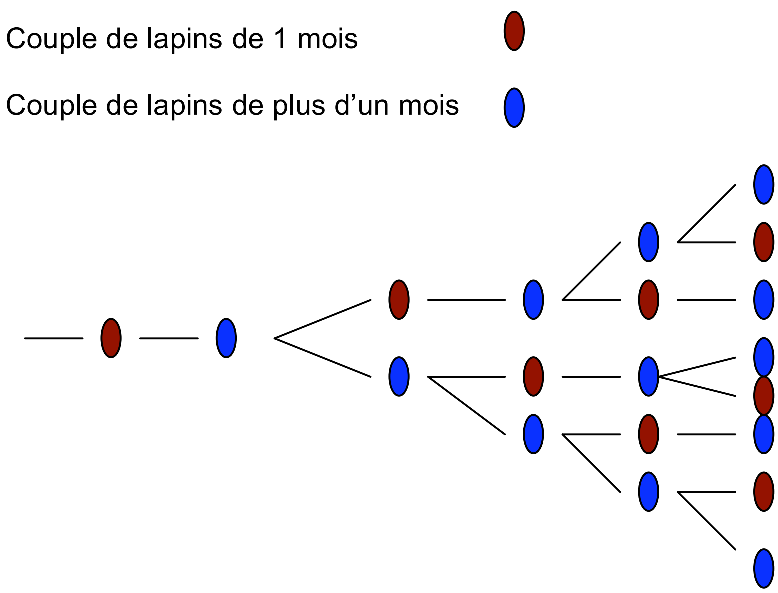
L2 Le premier couple de lapins a un mois, il ne peut donc pas engendrer de nouveau couple de lapins. On a toujours **un** couple de lapins.

L3 Le premier couple de lapins a deux mois, il ne peut alors engendrer un nouveau couple de lapins. On a maintenant **deux** couples de lapins.

L4 Le premier couple de lapins a trois mois, il peut alors engendrer un nouveau couple de lapins, par contre le deuxième n'a qu'un mois et ne peut pas engendrer de nouveau couple. On a maintenant **trois** couples de lapins.

L5 Le premier couple de lapins a trois mois et le deuxième deux mois, ils peuvent donc engendrer chacun un nouveau couple de lapins, par contre le troisième n'a qu'un mois et ne peut pas engendrer de nouveau couple.
On a maintenant **cinq** couples de lapins.

Arbre :



En observant l'arbre ci-dessus, voire en le complétant encore pour quelques mois, on constate que le nombre de couples de lapins est égal à la somme des nombres de couples de lapins pour les deux mois précédents.
C'est-à-dire que : Ln = Ln–1 + Ln–2

On a alors la suite :

L1 = 1 ; L2 = 1 ; L3 = 2 ; L4 = 3 ; L5 = 5 ; L6 = 8 ; L7 = 13 ; L8 = 21 ; L9 = 34 ; L10 = 55 ; L11 = 89 ; L12 = 144

Remarques

Les différentes illustrations utilisées pour chacun de ces cinq problèmes ne sont pas forcément liées à la situation pour laquelle elles ont été choisies. Elles peuvent donc également être utilisées pour les autres problèmes.

Extensions et développements possibles.

Recherche du rapport entre deux termes successifs (rapport d'or)…

U_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
U_n / U_{n-1}		1	2	1.5	1.6667	1.6000	1.6250	1.6154	1.6190	1.6176	1.6182	1.6180

et voir que ce rapport tend vers le rapport d'or : $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}61803$

Calcul de la limite de ce rapport.

En admettant que le rapport $\frac{U_n}{U_{n-1}}$ admet une limite et en posant, pour n grand : $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

résoudre cette l'équation : $\frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_{n+1}}{U_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_n}{U_{n-1}} = \frac{U_n + U_{n-1}}{U_n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_n}{U_{n-1}} = 1 + \frac{U_{n-1}}{U_n}$

Recherche de la forme algébrique de la suite de Fibonacci (Binet).

SEMAINE DE L'ARITHMÉTIQUE
proposition d'activité

Titre de l'activité	Limite de F_n / F_{n-1}
Résumé de l'activité	Prouver que $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \Phi$
Type d'activité	Activité d'observation et de déduction avec justification.
Degrés concernés	Collège (2-)3-4
Énoncé destiné aux élèves	Déterminer le comportement de $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ lorsque $n \to \infty$. (Calcul de $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$)
Durée	30mn-1h
Propositions de déroulement	Laisser les élèves en petits groupes, leurs proposer de calculer avec plusieurs valeurs de n, nommer (par exemple x)le résultat de $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ lorsque $n \to \infty$ et leur suggérer de trouver une équation en utilisant la construction de la suite de Fibonacci. Après 30 minutes, confronter les résultats, puis donner une preuve si cela n'a pas encore été fait par les élèves.
Références aux contenus d'enseignement, plans d'études et moyens d'enseignement	Limite d'une suite. Formule du 2[e] degré.
Analyse préalable de l'activité (démarches prévisibles des élèves, interventions de l'enseignant)	Il est probable que les élèves ne trouvent pas que : si $x = \frac{F_n}{F_{n-1}}$ lorsque $n \to \infty$ alors $\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = \frac{1}{x}$ Faire "mousser" le résultat.

Limite de F_n/ F_{n-1}

Déterminer le comportement de $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ lorsque $n \to \infty$.

Calculer $\lim_{n \to \infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$