Chapitre II

Maxima et minima relatifs et calcul de variations

Ce chapitre est consacré à l'étude des extrema d'une fonction à valeurs réelles. Il est bien connu que pour une fonction $f : I\!R \to I\!R$ la condition $f'(a) = 0$ est nécessaire et les conditions $f'(a) = 0$, $f''(a) > 0$ sont suffisantes pour que a soit un minimum relatif. Nous allons étendre ce résultat à des fonctions $f : U \to I\!R$ où U est un ouvert d'un espace vectoriel normé E. Nous étudierons également des conditions pour que la restriction $f|_{\mathcal{M}}$, où $\mathcal{M}$ est une sous-variété de la forme $\mathcal{M} = \{x \in U\,;\, g(x) = 0\}$, possède un extremum en a. Une application importante est la situation où E est un espace de fonctions. Les conditions nécessaires de l'extremum s'expriment alors par une équation différentielle, l'équation d'Euler-Lagrange.

II.1 Maxima et minima relatifs

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E et $f : U \to I\!R$. On dit que f possède un *minimum relatif* au point $a \in U$, s'il existe un voisinage V de a ($V \subset U$) tel que

$$f(x) \geq f(a) \qquad \text{pour tout } \ x \in V.$$

Un minimum relatif est dit *strict*, si

$$f(x) > f(a) \qquad \text{pour tout } \ x \in V \setminus \{a\}.$$

De la même manière on définit un maximum relatif ou un maximum relatif strict. On dit que f possède un *extremum relatif* en a, si elle possède un minimum ou un maximum relatif en a.

Théorème 1.1 (condition nécessaire) *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E et supposons que $f : U \to I\!R$ soit différentiable en $a \in U$. Si f admet un extremum relatif en a, alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. Supposons que f admette un minimum relatif en a (le cas d'un maximum relatif est traité de la même manière). Les hypothèses impliquent que pour un $h \in E$ fixé et pour $|\varepsilon|$ suffisamment petit

$$0 \leq f(a + \varepsilon h) - f(a) = f'(a)\varepsilon h + r(a + \varepsilon h) \cdot |\varepsilon| \cdot \|h\|$$

où $r(a+\varepsilon h) \to 0$ si $\varepsilon \to 0$. En divisant cette relation par ε et en considérant la limite $\varepsilon \to 0$ on obtient $f'(a)h \geq 0$. On en déduit $f'(a) = 0$, car $h \in E$ est arbitraire. □

Le lemme suivant représente un cas particulier de la série de Taylor avec reste.

Lemme 1.2 *Soit $f : U \to I\!R$ (U un ouvert d'un espace vectoriel normé E) deux fois différentiable en $a \in U$. Alors, on a*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2!} f''(a)(h,h) + s(h)\|h\|^2, \tag{1.1}$$

où $s(h) \to 0$ si $h \to 0$.

Démonstration. Considérons la fonction

$$g(h) := f(a+h) - f(a) - f'(a)h - \frac{1}{2!} f''(a)(h,h),$$

définie dans un voisinage de $0 \in E$. On a $g(0) = 0$ et la dérivée de $g(h)$ est donnée par

$$g'(h) = f'(a+h) - f'(a) - f''(a)(h,\cdot) = r(h)\|h\|$$

avec $r(h) \to 0$ si $h \to 0$, car $f'(x)$ est différentiable en a. Par le théorème des accroissements finis, on obtient alors

$$|g(h)| \le \sup_{0<t<1} \|g'(th)\| \cdot \|h\| \le \sup_{0<t<1} \|r(th)\| \cdot \|h\|^2.$$

Ceci implique que la fonction $s(h)$, définie par (1.1), satisfait $s(h) \to 0$ si $h \to 0$. $\square$

Théorème 1.3 (condition nécessaire) *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé et $f : U \to I\!R$ deux fois différentiable en $a \in U$. Si f possède un minimum relatif en a, alors*

$$f''(a)(h,h) \ge 0 \qquad \textit{pour tout} \quad h \in E. \tag{1.2}$$

Démonstration. On remplace h par εh dans (1.1), on divise la formule obtenue par ε^2 et on considère la limite $\varepsilon \to 0$. $\square$

On dit que $a \in U$ est un *point critique* de $f : U \to I\!R$ si $f'(a) = 0$. La condition (1.2) ne suffit pas pour qu'un point critique soit un minimum relatif de f. La fonction $f(x) = x^3$ nous sert comme contre-exemple.

Théorème 1.4 (condition suffisante) *Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé et $f : U \to I\!R$ deux fois différentiable en $a \in U$. Si $f'(a) = 0$ et si $f''(a)$ satisfait*

$$f''(a)(h,h) \ge \gamma \|h\|^2 \qquad \textit{pour tout} \quad h \in E \tag{1.3}$$

avec un $\gamma > 0$, alors f admet un minimum relatif strict au point a.

Démonstration. Les hypothèses sur $f'(a)$ et $f''(a)$ et la formule (1.1) impliquent que

$$f(a+h) - f(a) \ge \Big(\frac{\gamma}{2} - \|s(h)\|\Big)\|h\|^2.$$

Comme $s(h) \to 0$ si $h \to 0$, on en déduit que $f(a+h) > f(a)$ pour $h \neq 0$ suffisamment petit. $\square$

Exemple 1.5 Pour le cas particulier $U \subset \mathbb{R}^n$, où $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction à n variables réelles, la condition $f'(a) =$ devient

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \ldots, a_n) = 0,$$

ce qui constitue un système de n équations pour les n inconnues $a_1, \ldots, a_n$. La condition (1.3) est équivalente au fait que la matrice Hessienne

$$H(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

est une matrice définie positive, c.-à-d., toutes les valeurs propres sont positives. La valeur de γ correspond à la plus petite valeur propre de $H(a)$.

II.2 Multiplicateurs de Lagrange

Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E, $f : U \to \mathbb{R}$, et considérons la sous-variété $\mathcal{M} = \{x \in U\,;\, g(x) = 0\}$ où $g : U \to \mathbb{R}^m$. Le problème consiste à trouver les minima (ou maxima) de la restriction $f|_{\mathcal{M}}$, c.-à-d., on cherche $a \in \mathcal{M}$ tel que

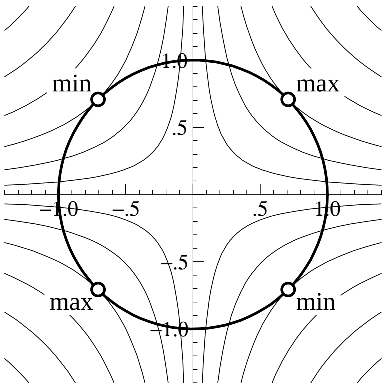
$$f(x) \geq f(a) \qquad \text{pour tout} \;\; x \in V \cap \mathcal{M},$$

où V est un voisinage de a dans U.

Exemple 2.1 Soit $U = \mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ et $g(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$. On cherche alors les extrema de la fonction $f(x)$ sur le cercle de rayon 1. Par un raisonnement géometrique (voir [HW95, page 325]) on trouve la condition nécessaire

$$\operatorname{grad} f(a_1, a_2) = \lambda \operatorname{grad} g(a_1, a_2)$$

pour un extremum ($\operatorname{grad} f(a)$, qui est orthogonale aux courbes de niveau de f, doit avoir la même direction que $\operatorname{grad} g(a)$). Dans notre exemple on obtient



$$a_2 = 2\lambda a_1, \qquad a_1 = 2\lambda a_2, \qquad a_1^2 + a_2^2 = 1$$

et on trouve sans difficulté les quatre solutions $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$.

Nous étendons ce résultat à la situation où U est un ouvert d'un espace vectoriel normé (éventuellement de dimension infinie) et où la sous-variété $\mathcal{M}$ est donnée par m équations.

Théorème 2.2 (condition nécessaire) *Soit $U \subset E$ un ouvert d'un espace de Banach E, et supposons que $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}^m$ soient continûment différentiables dans un voisinage de $a \in \mathcal{M} = \{x \in U\,;\, g(x) = 0\}$. Si $g'(a)$ est surjective et si $f|_{\mathcal{M}}$ possède un extremum relatif en a, alors il existe des nombres $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ (multiplicateurs de Lagrange) tels que*

$$f'(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i'(a) = 0 \tag{2.1}$$

($g_i(x)$ est la ième composante du vecteur $g(x)$).

Remarque. Avec la *fonction de Lagrange*

$$\mathcal{L}(x,\lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \tag{2.2}$$

les conditions $a \in \mathcal{M}$ et (2.1) sont équivalentes à $\mathcal{L}'(a,\lambda) = 0$.

Démonstration. Par la surjectivité de $g'(a)$ on peut trouver des vecteurs $h_1, \ldots, h_m \in E$ tels que $g'(a)h_j = e_j = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$, c.-à-d., $g_i'(a)h_j = \delta_{ij}$ où $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$. Considérons alors la fonction

$$G(x,t) := g(x + t_1 h_1 + \ldots + t_m h_m)$$

avec $t = (t_1,\ldots,t_m)^T \in I\!R^m$. On a $G(a,0) = 0$ et

$$\frac{\partial G}{\partial t}(a,0) = \Big(g'(a)h_1, \ldots, g'(a)h_m\Big) = I \qquad \text{(l'identité)}.$$

Le théorème des fonctions implicites implique que, proche de $(a,0)$, il existe une fonction différentiable $t(x) = (t_1(x),\ldots,t_m(x))^T$ telle que $G(x,t(x)) = 0$. Le vecteur $y := x + h_1 t_1(x) + \ldots + h_m t_m(x)$ satisfait donc $g(y) = 0$ pour tout x dans un voisinage de a. La dérivée de $g_i(y) = 0$ par rapport à x donne alors au point a

$$0 = g_i'(a)\Big(I + h_1 t_1'(a) + \ldots + h_m t_m'(a)\Big) = g_i'(a) + t_i'(a).$$

Comme $f|_{\mathcal{M}}$ possède un extremum relatif en a, la condition nécessaire du Théorème 1.1 implique que la dérivée de $f(x + h_1 t_1(x) + \ldots + h_m t_m(x))$ est nulle au point $x = a$, c.-à-d.,

$$f'(a)\Big(I + h_1 t_1'(a) + \ldots + h_m t_m'(a)\Big) = 0.$$

En posant $\lambda_i := f'(a)h_i$ et en utilisant la relation $t_i'(a) = -g_i'(a)$, on obtient l'affirmation (2.1). □

Pour le cas particulier $E = I\!R^n$, la surjectivité de $g'(a)$ s'exprime par le fait que la matrice

$$g'(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

possède le rang m.

Exemple 2.3 Soient

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,x_3) &= x_1 - x_2 - x_3 \\ g_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1^2 + 2x_2^2 - 1 \\ g_2(x_1,x_2,x_3) &= 3x_1 - 4x_3 \end{aligned}$$

et cherchons les extrema de $f|_{\mathcal{M}}$ où $\mathcal{M} := \{x \in I\!R^3\,;\, g_1(x) = g_2(x) = 0\}$. L'ensemble $\mathcal{M}$ représente l'intersection d'un cylindre elliptique avec un plan. On vérifie aisement que $g'(x)$ possède le rang 2 pour tout $x \in \mathcal{M}$. Considérons alors la fonction de Lagrange

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = x_1 - x_2 - x_3 - \lambda_1(x_1^2 + 2x_2^2 - 1) - \lambda_2(3x_1 - 4x_3).$$

Les conditions nécessaires (2.1) nous donnent

$$1 - 2\lambda_1 x_1 - 3\lambda_2 = 0, \qquad -1 - 4\lambda_1 x_2 = 0, \qquad -1 + 4\lambda_2 = 0.$$

On obtient donc $\lambda_2 = 1/4$ et, en éliminant λ_1 de deux autres équations, on trouve $x_2 + 2x_1 = 0$. Les solutions du système (2.1) sont alors $(1/3, -2/3, 1/4)$ et $(-1/3, 2/3, -1/4)$.

Théorème 2.4 (condition suffisante) *Soit $U \subset E$ un ouvert d'un espace de Banach E. Supposons de plus que $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}^m$ soient deux fois différentiables en $a \in \mathcal{M} := \{x \in U\,;\, g(x) = 0\}$ et que $g'(a)$ soit surjective. Si (2.1) est satisfait et si*

$$\Big(f''(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i''(a)\Big)(h,h) \geq \gamma\, \|h\|^2 \qquad \textit{pour } h \textit{ satisfaisant } \; g'(a)h = 0, \tag{2.3}$$

avec un $\gamma > 0$, alors $f|_{\mathcal{M}}$ admet un minimum relatif strict au point a.

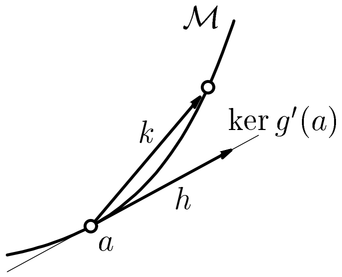
Démonstration. En appliquant le Lemme 1.2 à la fonction $f(x) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x)$ et en utilisant (2.1) nous obtenons pour $a + k \in \mathcal{M}$

$$f(a+k) - f(a) = \frac{1}{2}\Big(f''(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i''(a)\Big)(k,k) + s(k)\,\|k\|^2, \tag{2.4}$$

où $s(k) \to 0$ si $k \to 0$. Considérons maintenant k tel que $a + k \in \mathcal{M}$. La difficulté est que k ne satisfait pas nécessairement $g'(a)k = 0$ et qu'on ne peut pas directement utiliser (2.3).

Pour le vecteur $k \in E$ nous considérons

$$h = k - \alpha_1 h_1 - \ldots - \alpha_m h_m \tag{2.5}$$



où les vecteurs $h_1, \ldots, h_m$ sont comme dans la démonstration du Théorème 2.2. Nous choisissons $\alpha_i = g_i'(a)k$ afin que h soit dans $\ker g'(a)$. Si $a + k \in \mathcal{M}$ nous avons (de nouveau par le Lemme 1.2) que

$$0 = g(a+k) - g(a) = g'(a)k + \frac{1}{2}\, g''(a)(k,k) + r(k)\,\|k\|^2$$

avec $r(k) \to 0$ pour $k \to 0$. Ceci implique $\|g'(a)k\| \leq c_1\|k\|^2$ pour k suffisamment petit, et en utilisant (2.5) aussi $\|h - k\| \leq c_2\|k\|^2$. L'inégalité $|\,\|h\| - \|k\|\,| \leq \|h - k\|$ montre alors que $c_3\|k\| \leq \|h\| \leq c_4\|k\|$ si k est suffisamment petit. L'expression de droite de l'équation (2.4) peut donc être écrite sous la forme

$$\frac{1}{2}\Big(f''(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i''(a)\Big)(h,h) + \widehat{s}(k)\,\|h\|^2,$$

où $\widehat{s}(k) \to 0$ pour $k \to 0$. Par la condition (2.3), cette expression est positive pour $k \neq 0$ suffisamment petit. Donc, $f(a+k) - f(a)$ est strictement positive pour $k \neq 0$ suffisamment petit, si $a + k \in \mathcal{M}$. □

Exemple 2.5 Utilisons la condition (2.3) du Théorème 2.4 pour démontrer que le point $a = (-1/3, 2/3, -1/4)$ est un minimum relatif strict de la fonction $f|_{\mathcal{M}}$ de l'Exemple 2.3. Comme $\lambda_1 = -3/8$ et $\lambda_2 = 1/4$ nous avons pour $h = (h_1, h_2, h_3)^T$ que

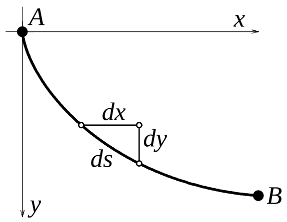
$$\Big(f''(a) - \lambda_1 g_1''(a) - \lambda_2 g_2''(a)\Big)(h,h) = \frac{3}{8}(2h_1^2 + 4h_2^2).$$

Pour h satisfaisant $g'(a)h = 0$ (en particulier $3h_1 - 4h_3 = 0$) on obtient

$$\frac{3}{8}\Big(2h_1^2 + 4h_2^2\Big) = \frac{3}{8}\Big(h_1^2 + 4h_2^2 + \frac{16}{9}h_3^2\Big) \geq \frac{3}{8}\,\|h\|^2$$

et la condition suffisante pour un minimum strict est vérifiée.

II.3 Calcul de variations



En 1696, Johann Bernoulli posait le problème suivant: *une particule glisse sous l'influence de la gravité sur une courbe reliant A et B (dans un plan vertical). Trouver la courbe pour laquelle le temps qu'il lui faut pour aller de A à B est minimal.* Une telle courbe s'appelle *brachistochrone.* La solution de ce problème, proposée par Jakob Bernoulli, est à l'origine du calcul de variations.

La formulation mathématique part du principe de la conservation de l'énergie mécanique

$$\frac{m}{2}\Big(\frac{ds}{dt}\Big)^2 - mgy = 0$$

(l'origine est au point A). Ceci implique $ds/dt = \sqrt{2gy}$. Comme $ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx$, le problème revient à minimiser l'expression

$$T(y) = \int_0^{t_1} dt = \int_0^{\ell_1} \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \int_0^b \frac{\sqrt{1+y'(x)^2}}{\sqrt{2gy(x)}}\,dx, \tag{3.1}$$

où T est un opérateur de $\mathcal{C}^1([0,b])$ dans $I\!R$.

Problème Considérons une fonction continue $L(x,y,y')$, définie dans un ouvert de $I\!R^3$ et à valeurs dans $I\!R$. Le problème consiste à trouver une fonction $y(x)$ telle que

$$T(y) = \int_a^b L\Big(x, y(x), y'(x)\Big)\,dx \tag{3.2}$$

soit minimale parmi toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant $y(a) = A$ et $y(b) = B$. La fonction $L(x,y,y')$ s'appelle *fonction de Lagrange* ou *Lagrangien.*

Lemme 3.1 *Soit $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ une fonction qui vérifie $y(a) = A$, $y(b) = B$. Soit de plus $L(x,y,y')$ une fonction continûment différentiable dans un voisinage de $\{(x,y(x),y'(x)) \in I\!R^3\,;\,x\in[a,b]\}$. Si l'expression $T(y)$ de (3.2) possède un extremum en y, alors*

$$\int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial y}\Big(x,y(x),y'(x)\Big)h(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}\Big(x,y(x),y'(x)\Big)h'(x)\Big)\,dx = 0 \tag{3.3}$$

pout tout $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$.

Démonstration. Considérons la fonction

$$S(\varepsilon) := T(y+\varepsilon h) = \int_a^b L\Big(x, y(x)+\varepsilon h(x), y'(x)+\varepsilon h'(x)\Big)\,dx,$$

où y satisfait les hypothèses du lemme, $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$ avec $h(a) = h(b) = 0$, et ε est un paramètre réel (petit). Si y est un extremum de $T(y)$, 0 en est un de $S(\varepsilon)$, et la condition nécessaire $S'(0) = 0$ doit être satisfaite. L'affirmation du lemme est une conséquence du fait que l'expression de (3.3) est égale à $S'(0)$ (les hypothèses garantissent qu'on peut échanger la dérivation avec l'integration). □

Une autre possibilité serait de considérer l'espace vectoriel $E = \{h \in \mathcal{C}^1([a,b])\,;\, h(a) = h(b) = 0\}$, de le munir d'une norme, et de considérer l'application $F : E \to I\!R$, définie par $F(h) := T(y+h)$. Pour que y soit un extremum de T, $h = 0$ doit être un extremum de F. La condition nécessaire $F'(0) = 0$ (où bien $F'(0)h = 0$ pour tout $h \in E$) du Théorème 1.1 est équivalente à (3.3). Les résultats des Théorèmes 1.3 et 1.4 peuvent également être appliqués.

Définition 3.2 Une fonction $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ qui satisfait $y(a) = A$, $y(b) = B$ et la condition (3.3) pour tout $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$ vérifiant $h(a) = h(b) = 0$, s'appelle une *extrémale* du problème (3.2).

Pour trouver la solution du problème variationel, nous cherchons à éliminer la présence de $h(x)$ dans la condition nécessaire (3.3).

Théorème 3.3 (Equation d'Euler-Lagrange) *Soit $L(x,y,y')$ de classe $\mathcal{C}^1$. Une fonction $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ est une extrémale du problème (3.2) aux extrémités fixées $y(a) = A$ et $y(b) = B$, si et seulement si*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x)) \quad \textit{est continûment différentiable et} \\ &\frac{\partial L}{\partial y}(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x)) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Démonstration. Suffisance. Notons $A(x) = \frac{\partial L}{\partial y}(x,y(x),y'(x))$ et $B(x) = \frac{\partial L}{\partial y'}(x,y(x),y'(x))$. La condition (3.4), c.-à-d., $A(x) = B'(x)$, implique que

$$\int_a^b \Big(A(x)h(x) + B(x)h'(x)\Big)\,dx = \int_a^b \Big(B(x)h(x)\Big)'\,dx = B(x)h(x)\big|_a^b = 0$$

pour $h(a) = h(b) = 0$. Donc, $y(x)$ est une extrémale de (3.2).

Nécessité. La condition (3.3) s'écrit comme $\int_a^b (A(x)h(x) + B(x)h'(x))\,dx = 0$. On intègre par parties la première expression de cette intégrale. Si $C(x)$ est une primitive de $A(x)$, c.-à-d., $C(x)$ est continûment différentiable et $C'(x) = A(x)$, on a que

$$0 = \int_a^b \Big(A(x)h(x) + B(x)h'(x)\Big)\,dx = \int_a^b \Big(B(x) - C(x)\Big)h'(x)\,dx$$

pour tout $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$ satisfaisant $h(a) = h(b) = 0$. En appliquant le Lemme de Du Bois Reymond (Lemme 3.4) on obtient $B(x) - C(x) = Const.$ Donc, $B(x)$ est continûment différentiable et $B'(x) = C'(x) = A(x)$. □

Lemme 3.4 (Du Bois Reymond) *Soit $d : [a,b] \to I\!R$ continue et*

$$\int_a^b d(x)h'(x)\,dx = 0 \qquad \textit{pour tout } h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \textit{ vérifiant } h(a) = h(b) = 0,$$

alors $d(x) = Const.$

Démonstration. Posons

$$m := \frac{1}{b-a}\int_a^b d(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad h(x) := \int_a^x (d(t) - m)\,dt.$$

Cette fonction h est dans $\mathcal{C}^1([a,b])$, elle vérifie $h(a) = h(b) = 0$ et on a $h'(x) = d(x) - m$. On obtient donc

$$\int_a^b (d(x) - m)^2\,dx = \int_a^b (d(x) - m)h'(x)\,dx = -m\int_a^b h'(x)\,dx = -m(h(b) - h(a)) = 0.$$

Comme $d(x) - m$ est continue par hypothèse, ceci est possible seulement si $d(x) - m = 0$. □

Si $L(x,y,y')$ et $y(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^2$, l'équation d'Euler-Lagrange peut être écrite sous la forme

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,y') - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y'}(x,y,y') - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'}(x,y,y')\, y' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y'}(x,y,y')\, y'' = 0, \tag{3.5}$$

qui est une équation différentielle de deuxième ordre. Le théorème suivant nous permet de réduire l'ordre de l'équation différentielle dans la situation où $L(x,y,y')$ ne depend que de y et y'.

Théorème 3.5 *Soit le Lagrangien L de classe $\mathcal{C}^1$ et indépendent de la variable x. Alors, toute extrémale $y(x)$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifie la relation*

$$L(y(x),y'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y'}(y(x),y'(x))\, y'(x) = Const. \tag{3.6}$$

Démonstration. La dérivée de $L(y(x),y'(x)) - \frac{\partial L}{\partial y'}(y(x),y'(x))\, y'(x)$ par rapport à x donne

$$\frac{\partial L}{\partial y}(\ldots)\, y'(x) + \frac{\partial L}{\partial y'}(\ldots)\, y''(x) - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial L}{\partial y'}(\ldots)\Big)\, y'(x) - \frac{\partial L}{\partial y'}(\ldots)\, y''(x),$$

ce qui est nul par (3.4). □

Exemple 3.6 (Brachystochrone) Le problème consiste à minimiser l'intégrale (3.1) parmi toutes les fonctions satisfaisant $y(0) = 0$ et $y(b) = B$ (b et B sont des nombres positifs). La condition nécessaire (3.6) devient

$$\frac{\sqrt{1+y'^{\,2}}}{\sqrt{y}} - \frac{y'}{\sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^{\,2}}} \cdot y' = Const,$$

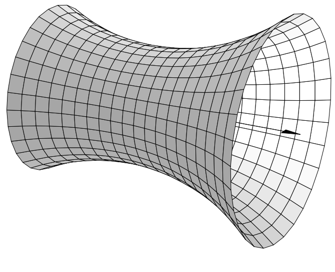
ce qui est équivalent à $1 + y'^{\,2} - y'^{\,2} = Const \cdot \sqrt{y}\,\sqrt{1+y'^{\,2}}$. On en déduit l'équation différentielle $y(1+y'^{\,2}) = C$, dont la solution générale est une cycloïde donnée par (voir [HW95, page 138])

$$x(\varphi) = \frac{C}{2}(\varphi - \sin\varphi) + D, \qquad y(\varphi) = \frac{C}{2}(1-\cos\varphi). \tag{3.7}$$

La Fig. 3.1 (le dessin de gauche) montre les solutions pour $0 \le \varphi \le 2\pi$ et pour $D = 0$ (pour qu'elles passent par l'origine). On voit que, quelque soit $b > 0$ et $B > 0$, il existe une unique valeur de C telle que la courbe (3.7) passe par (b, B) pour un $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Attention. Ce problème n'entre pas exactement dans le cadre de notre théorie, car $L(y,y')$ n'est pas définie pour $y = 0$. Nous ne discutons pas les détails techniques pour justifier la solution.

Exemple 3.7 (Surface de révolution d'aire minimale) On se donne $a < b$, $A > 0$, $B > 0$, et on cherche une fonction $y(x)$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $y(a) = A$, $y(b) = B$ et que la surface de révolution $\{(x, y(x)\cos\varphi, y(x)\sin\varphi)\,;\, x \in [a,b], \varphi \in [0,2\pi]\}$ possède une aire minimale. On a la formule



$$\text{Aire} = 2\pi \int y\, ds = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\, dx,$$

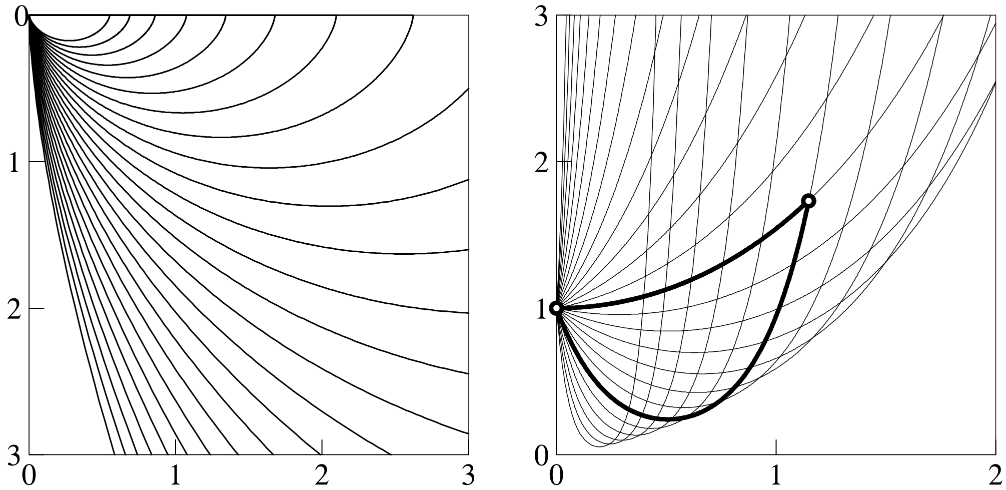


FIG. 3.1 – *Brachystochrone (gauche) et surface de révolution d'aire minimale (droite)*

et l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme (3.6) donne

$$y\sqrt{1+y'^{\,2}} - \frac{y \cdot y'}{\sqrt{1+y'^{\,2}}} \cdot y' = Const.$$

On en déduit

$$y^2 = C^2(1+y'^{\,2}) \qquad \text{ou} \qquad \frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{C^2} - 1}.$$

On résoud cette équation différentielle en utilisant la séparation des variables et la substitution $y = C\cosh u$. Ceci donne $u = x/C + \lambda$ ou $y(x) = C\cosh(x/C + \lambda)$ comme solution générale. En choisissant $a = 0$ et $A = 1$ (normalisation) la condition $y(0) = 1$ devient $1 = C\cosh\lambda$, et on obtient pour la solution la représentation

$$y(x) = \frac{1}{\cosh\lambda}\,\cosh\Big(x \cdot \cosh\lambda + \lambda\Big). \tag{3.8}$$

La Fig. 3.1 (le dessin de droite) montre qu'en général ce problème possède deux extrémales (par exemple pour $b = 1.148$ et $B = 1.731$ on obtient $\lambda = -2.1$ et $\lambda = 0$). Pour la courbe supérieure (celle avec le plus grand λ) l'aire de la surface de révolution est minimale (sans démonstration, pour plus de détails voir [Fox, page 48]).

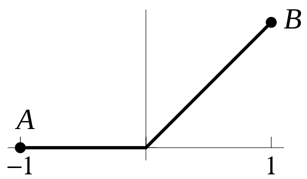
Si le point (b, B) est en-dessous de l'enveloppe des courbes (3.8), il n'y a pas d'extrémale. Dans cette situation, la fonction non-continue $y(x) = 0$ pour $0 < x < b$, $y(0) = 1$ et $y(b) = B$ donne la valeur minimale de l'aire (Aire $= \pi(1+B^2)$). Elle s'appelle solution de Goldschmidt [Tr83, page 214].

Exemple 3.8 Un exemple plus simple qui n'admet pas d'extrémale est le suivant (du à Weierstraß):

$$\int_{-1}^{1} y(x)^2 (1 - y'(x))^2\,dx \quad \to \quad \min, \qquad y(-1) = 0, \quad y(1) = 1.$$

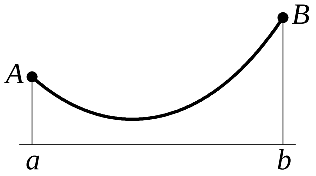
L'équation d'Euler-Lagrange est alors

$$y^2(1-y')^2 + 2y^2(1-y')y' = y^2(1-y')(1+y') = Const.$$



Elle n'a pas de solution différentiable qui vérifie les conditions aux bords. L'intégrale est minimale pour la fonction donnée par $y(x) = 0$ pour $-1 \le x \le 0$ et par $y(x) = x$ pour $0 \le x \le 1$, car elle vaut alors zéro.

II.4 Problèmes isopérimétriques



Considérons le problème suivant, proposé par Euler (1734): *trouver la forme d'une chaîne de longueur ℓ (à l'équilibre), qui est suspendue aux extrémités.* Mathématiquement, ce problème devient

$$\int_a^b y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}\,dx \;\to\; \min \qquad \text{où} \qquad \int_a^b \sqrt{1+y'(x)^2}\,dx = \ell, \tag{4.1}$$

c.-à-d., l'énergie potentielle est minimale et la longueur est ℓ (condition "isopérimétrique").

Problème général Soient données deux fonctions continues $f(x,y,y')$ et $g(x,y,y')$, définies dans un ouvert de $\mathbb{R}^3$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et $\ell \in \mathbb{R}$. Le *problème isopérimétrique* consiste à trouver une fonction $y(x)$ telle que

$$F(y) := \int_a^b f(x,y(x),y'(x))\,dx \tag{4.2}$$

soit minimale parmi toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant

$$G(y) := \int_a^b g(x,y(x),y'(x))\,dx = \ell \qquad \text{et} \qquad y(a)=A,\ y(b)=B. \tag{4.3}$$

Nous allons écrire ce problème sous la forme traitée dans le paragraphe II.2. Supposons qu'une solution $y \in \mathcal{C}^1([a,b])$ existe. Comme dans la discussion qui suit le Lemme 3.1, nous introduisons l'espace vectoriel

$$E = \{h \in \mathcal{C}^1([a,b])\,;\ h(a)=h(b)=0\}$$

muni d'une norme et nous considérons les applications $F_0 : E \to \mathbb{R}$ et $G_0 : E \to \mathbb{R}$ définies par $F_0(h) = F(y+h)$ et $G_0(h) = G(y+h)$. Le problème consiste alors à montrer que $h=0$ est un minimum de $F_0(h)$ assujetti à la condition $G_0(h) - \ell = 0$.

Théorème 4.1 *Soient $f(x,y,y')$ et $g(x,y,y')$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $y \in \mathcal{C}^2([a,b])$ une solution du problème isopérimétrique. Si*

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y(x),y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial g}{\partial y'}(x,y(x),y'(x)) \not\equiv 0, \tag{4.4}$$

alors il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction

$$L(x,y,y') = f(x,y,y') - \lambda\, g(x,y,y') \tag{4.5}$$

satisfait l'équation d'Euler-Lagrange (3.4).

Démonstration. Nous allons appliquer le Théorème 2.2 au problème $F_0(h) \to \min$ assujetti à la restriction $G_0(h) - \ell = 0$. La condition (4.4) implique que $G_0'(0) : E \to \mathbb{R}$ est surjective. Il existe alors un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F_0'(0) - \lambda G_0'(0) = 0$. Mais ceci est exactement la condition (3.3) avec $L(x,y,y')$ pris de (4.5). L'affirmation est alors une conséquence de la démonstration (nécessité) du Théorème 3.3. □

Exemple 4.2 Pour le problème du début de ce paragraphe nous obtenons

$$L(x, y, y') = (y - \lambda)\sqrt{1 + y'^{\,2}}.$$

Après la transformation $y - \lambda = z$, l'équation d'Euler-Lagrange est exactement la même que pour le problème de la surface de révolution d'aire minimale (Exemple 3.7). On obtient donc

$$y(x) = \lambda + C \cosh(x/C + D).$$

Les trois paramètres λ, C, D sont déterminés par $y(a) = A$, $y(b) = B$ et par

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_a^b \cosh(x/C + D)\, dx = C \sinh(x/C + D)\Big|_a^b.$$

II.5 Géodésiques des surfaces

Avant de discuter le calcul de géodésiques des surfaces (c.-à-d., des courbes de longueur minimale sur une surface donnée), nous généralisons les résultats du paragrapghe II.3 au cas de plusieurs fonctions.

Considérons une fonction $L(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$. Le problème consiste à trouver n fonctions $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ telles que

$$\int_a^b L\Big(x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\Big)\, dx \tag{5.1}$$

soit minimale parmi toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant $y_i(a) = A_i$ et $y_i(b) = B_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Ce problème correspond à celui du paragraphe II.3 où $y : [a, b] \to I\!R^n$. En considérant la fonction $S(\varepsilon) := \int_a^b L(x, y(x) + \varepsilon h(x), y'(x) + \varepsilon h'(x))\, dx$, nous obtenons comme dans le Lemme 3.1 la condition nécessaire

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial L}{\partial y_i}(x, y(x), y'(x))h_i(x) + \frac{\partial L}{\partial y_i'}(x, y(x), y'(x))h_i'(x)\Big)\, dx = 0 \tag{5.2}$$

pour tout $h_i \in \mathcal{C}^1([a, b])$ satisfaisant $h_i(a) = h_i(b) = 0$. Si l'on pose toutes les fonctions $h_j(x)$ égales à zéro sauf la $i$ème, on voit que la condition (5.2) est équivalente à

$$\int_a^b \Big(\frac{\partial L}{\partial y_i}(x, y(x), y'(x))h_i(x) + \frac{\partial L}{\partial y_i'}(x, y(x), y'(x))h_i'(x)\Big)\, dx = 0$$

pour $i = 1, \ldots, n$. On est donc de retour à la situation à une fonction, et comme dans le paragraphe II.3 on obtient le résultat suivant.

Théorème 5.1 *Soit $L(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n')$ de classe $\mathcal{C}^1$. Une fonction $y : [a, b] \to I\!R^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ est une extrémale du problème (5.1) aux extrémités fixées $y_i(a) = A_i$ et $y_i(b) = B_i$, si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$*

$$\frac{\partial L}{\partial y_i'}(x, y(x), y'(x)) \quad \textit{est continûment différentiable et}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_i}(x, y(x), y'(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y_i'}(x, y(x), y'(x)) = 0. \tag{5.3}$$

Revenons au problème mentionné au début de ce paragraphe et considérons une *surface* $\mathcal{M}$ dans $I\!R^3$, donnée par une paramétrisation $f : U \to I\!R^3$ où $U \subset I\!R^2$ est un ouvert. On suppose que f soit suffisamment différentiable et que $f'(u)$ soit de rang 2 pour tout $u \in U$. Des exemples sont

$$f(\varphi,\theta) = \Big(\cos\varphi\sin\theta,\, \sin\varphi\sin\theta,\, \cos\theta\Big)^T \qquad \text{(sphère de rayon 1)} \tag{5.4}$$

$$f(\varphi,z) = \Big(\cos\varphi,\, \sin\varphi,\, z\Big)^T \qquad \text{(cylindre)} \tag{5.5}$$

$$f(\varphi,z) = \Big((1-z)\cos\varphi,\, (1-z)\sin\varphi,\, z\Big)^T \qquad \text{(cône).} \tag{5.6}$$

Ils sont dessinés dans Fig. 5.1.

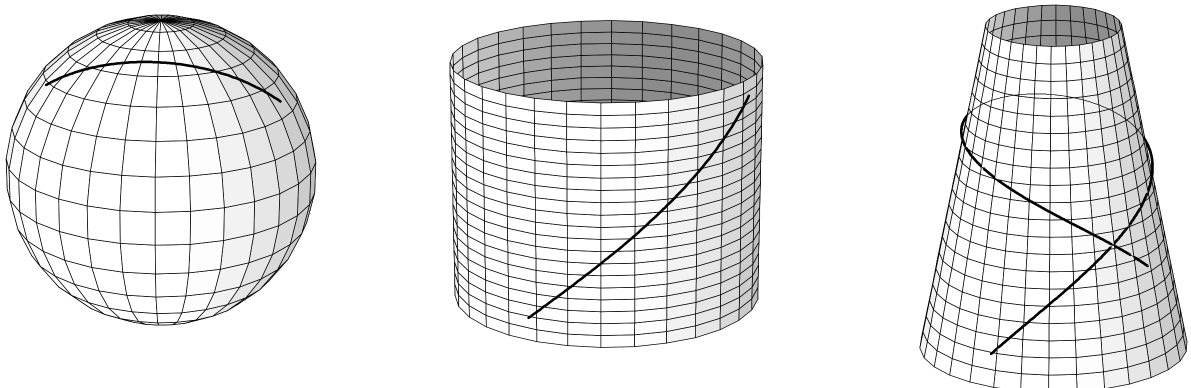


FIG. 5.1 – *Surfaces dans $I\!R^3$ avec des géodésiques*

Si $\beta : [a,b] \to U$ est une fonction différentiable avec $\beta'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$, alors $\gamma(t) := f(\beta(t))$ représente une *courbe* sur la surface $\mathcal{M}$. La longueur de cette courbe est donnée par

$$\int ds = \int_a^b \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_a^b \|(f\circ\beta)'(t)\|\, dt, \tag{5.7}$$

car $ds \approx \|\gamma(t+dt) - \gamma(t)\| \approx \|\gamma'(t)\|\, dt$. Comme $(f\circ\beta)'(t) = f'(\beta(t))\beta'(t)$, nous avons $\|(f\circ\beta)'(t)\|^2 = \beta'(t)^T f'(\beta(t))^T f'(\beta(t))\beta'(t)$, et l'intégrale (5.7) devient

$$\int_a^b \sqrt{L(\beta(t),\beta'(t))}\, dt \qquad \text{avec} \qquad L(\beta,\beta') = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(\beta)\beta_i'\beta_j', \tag{5.8}$$

où $\beta_1(t), \beta_2(t)$ sont les deux composantes de $\beta(t)$, et les $g_{ij}(u)$ sont les éléments de la matrice $G(u) := f'(u)^T f'(u)$, c.-à-d.,

$$g_{ij}(u) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial f_k}{\partial u_i}(u) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial u_j}(u). \tag{5.9}$$

Problème Pour une surface $\mathcal{M}$ donnée, calculer les courbes sur $\mathcal{M}$ ayant des extrémités fixées et une longueur minimale. Il s'agit alors de minimiser l'intégrale (5.8). Les extrémales de ce problème variationnel s'appellent *géodésiques* de la surface.

Ce problème est un cas particulier de (5.1) et nous pourrions utiliser le Théorème 5.1 pour calculer les extrémales du problème. Il y a néanmoins une astuce qui simplifie énormément le calcul. Tout d'abord, nous remarquons qu'une reparamétrisation de la courbe $\gamma(t)$ ne change pas sa longueur. On peut donc se restraindre à des paramétrisations particulières. Une possibilité est d'utiliser la transformation $t \leftrightarrow s$ définie par $s(t) = \int_a^t \|\gamma'(\tau)\| \, d\tau$. Elle est bijective et continûment différentiable. Pour la nouvelle variable, la courbe $\gamma(s) := \gamma(t(s))$ satisfait $\|\gamma'(s)\| = \|\gamma'(t(s))t'(s)\| = 1$, car $s'(t) = \|\gamma'(t)\|$ et donc $t'(s) = 1/\|\gamma'(t(s))\|$. On dit alors que $\gamma(s)$ est paramétrée par la longueur d'arc.

Théorème 5.2 *a) Supposons que la courbe $\gamma(s) = f(\beta(s))$ soit de classe $\mathcal{C}^1$ et paramétrée avec un paramètre naturel (c.-à-d., $\|\gamma'(s)\| = Const \neq 0$). Alors, γ est une géodésique de $\mathcal{M}$, si et seulement si $\beta(s)$ est une extrémale de*

$$\int_a^b L(\beta(s), \beta'(s)) \, ds, \tag{5.10}$$

où $L(\beta, \beta')$ est donné par (5.8).

b) Toutes les extrémales de (5.10) sont paramétrées avec un paramètre naturel.

Démonstration. a) Si $\gamma(s) = f(\beta(s))$ est paramétrée avec un paramètre naturel, on a $L(\beta(s), \beta'(s)) = \|(f \circ \beta)'(s)\|^2 = \|\gamma'(s)\|^2 = Const$ et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\beta_i}(\beta(s),\beta'(s)) \; - \; \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial\sqrt{L}}{\partial\beta_i'}(\beta(s),\beta'(s))\Big) &= \frac{\frac{\partial L}{\partial\beta_i}(\beta(s),\beta'(s))}{2\sqrt{L(\beta(s),\beta'(s))}} - \frac{d}{ds}\Bigg(\frac{\frac{\partial L}{\partial\beta_i'}(\beta(s),\beta'(s))}{2\sqrt{L(\beta(s),\beta'(s))}}\Bigg) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{Const}}\Big(\frac{\partial L}{\partial\beta_i}(\beta(s),\beta'(s)) - \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial\beta_i'}(\beta(s),\beta'(s))\Big)\Big). \end{aligned}$$

Ceci démontre la partie (a).

b) La fonction $L(\beta, \beta')$ est homogène de degré 2 en β', c.-à-d., $L(\beta, \sigma\beta') = \sigma^2 L(\beta, \beta')$. La dérivée par rapport à σ (pour $\sigma = 1$) donne l'identité d'Euler $\sum_{k=1}^2 \frac{\partial L}{\partial\beta_k'}(\beta, \beta')\beta_k' = 2L(\beta, \beta')$. On a donc

$$\begin{aligned} \frac{dL(\beta(s),\beta'(s))}{ds} &= \frac{d}{ds}\Big(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial L}{\partial\beta_k'}(\beta(s),\beta'(s))\beta_k'(s) - L(\beta(s),\beta'(s))\Big) \\ &= \sum_{k=1}^2\Big(\frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial\beta_k'}(\beta(s),\beta'(s))\Big)\beta_k'(s) + \frac{\partial L}{\partial\beta_k'}(\beta(s),\beta'(s))\beta_k''(s)\Big) \\ &\quad - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial L}{\partial\beta_k}(\beta(s),\beta'(s))\beta_k'(s) - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial L}{\partial\beta_k'}(\beta(s),\beta'(s))\beta_k''(s) \\ &= -\sum_{k=1}^2\Big(\frac{\partial L}{\partial\beta_k}(\beta(s),\beta'(s)) - \frac{d}{ds}\Big(\frac{\partial L}{\partial\beta_k'}(\beta(s),\beta'(s))\Big)\Big)\beta_k'(s) \; = \; 0, \end{aligned}$$

et $L(\beta(s), \beta'(s)) = \|\gamma'(s)\|^2$ ne dépend pas de s pour une extrémale $\beta(s)$ de (5.10). □

Exemple 5.3 (Géodésiques de la sphère) Pour la fonction $f(\varphi, \theta)$ de (5.4), on a

$$f'(\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ 0 & -\sin\theta \end{pmatrix}$$

et donc $g_{11}(\varphi, \theta) = \sin^2\theta$, $g_{12}(\varphi, \theta) = g_{21}(\varphi, \theta) = 0$ et $g_{22}(\varphi, \theta) = 1$. La fonction L de (5.8) devient

$$L(\varphi, \theta, \varphi', \theta') = \sin^2\theta \cdot \varphi'^{\,2} + \theta'^{\,2},$$

et les équations d'Euler-Lagrange sont

$$\frac{d}{ds}\Big(2\sin^2\theta\cdot\varphi'\Big)=0,\qquad 2\sin\theta\cos\theta\cdot\varphi'^{\,2}-\frac{d}{ds}(2\theta')=0. \tag{5.11}$$

La première équation implique $\sin^2\theta(s)\cdot\varphi'(s)=Const$ et on obtient

$$\varphi(b)=\varphi(a)+\int_a^b\frac{Const}{\sin^2\theta(s)}\,ds.$$

En supposant que $\varphi(a)=\varphi(b)$ mais $\theta(a)\neq\theta(b)$ (après une rotation de la sphère ceci est toujours possible), cette relation implique que la constante $Const$ doit être nulle, d'où $\varphi'(s)=0$ et $\varphi(s)=\varphi(a)$ pour tout s. De la deuxième équation de (5.11) on déduit alors que $\theta(s)=c_1+c_2s$. Les géodésiques de la sphère sont donc les cercles de rayon 1 avec pour centre l'origine de la sphère (grands cercles).

Exemple 5.4 (Géodésiques du cylindre) Pour la paramétrisation (5.5) on obtient le Lagrangien $L(\varphi,z,\varphi',z')=\varphi'^{\,2}+z'^{\,2}$ et les équations d'Euler-Lagrange impliquent $\varphi''(s)=0$ et $z''(s)=0$. Les géodésiques du cylindre sont les images de droites sous l'application (5.5). Autrement dit, si l'on déroule le cylindre, les géodésiques deviennent des droites.

Considérons encore des surfaces de révolution $f(\varphi,z)=\big(\rho(z)\cos\varphi,\ \rho(z)\sin\varphi,\ z\big)^T$. La dérivée de f est

$$f'(\varphi,z)=\begin{pmatrix}-\rho(z)\sin\varphi & \rho'(z)\cos\varphi\\ \rho(z)\cos\varphi & \rho'(z)\sin\varphi\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

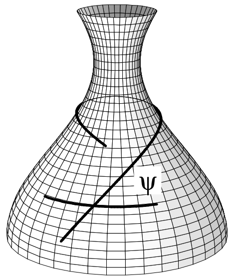
et pour le Lagrangien (5.8) nous trouvons

$$L(\varphi,z,\varphi',z')=\rho(z)^2\varphi'^{\,2}+(1+\rho'(z)^2)z'^{\,2}. \tag{5.12}$$

Théorème 5.5 (Clairaut) *Pour une géodésique $(\varphi(s),z(s))$ sur une surface de révolution $f(\varphi,z)=(\rho(z)\cos\varphi,\ \rho(z)\sin\varphi,\ z)^T$ on a*

$$\rho(z(s))\cdot\cos\psi(s)=Const,$$

où $\psi(s)$ est l'angle au point $\gamma(s)$ entre $\gamma'(s)$ (direction de la courbe) et le cercle horizontal de la surface.



Démonstration. L'équation d'Euler-Lagrange pour L de (5.12) donne $\frac{d}{ds}(2\rho(z(s))^2\varphi'(s))=0$, d'où $\rho(z(s))^2\varphi'(s)=Const$. On en déduit que

$$\cos\psi(s)=\frac{\langle\gamma'(s),(-\sin\varphi(s),\cos\varphi(s),0)^T\rangle}{\|\gamma'(s)\|}=\frac{\rho(z(s))\varphi'(s)}{C}=\frac{Const}{\rho(z(s))},$$

car $\gamma'(s)=f'(\varphi(s),z(s))(\varphi'(s),z'(s))^T$ et $\|\gamma'(s)\|=C$ par le Théorème 5.2, partie (b). $\square$

II.6 Exercices

1. Soit $f : I\!\!R^n \to I\!\!R$ deux fois différentiable en $a \in I\!\!R^n$. Démontrer que la condition du Théorème 1.4
$$f''(a)(h,h) \;\ge\; \gamma\|h\|^2 \quad \text{pour tout } h \in I\!\!R^n \;,$$
avec $\gamma > 0$ est équivalente à $f''(a)(h,h) > 0$ pour tout $h \neq 0$.
2. Soit $E := \{f : [1,\infty) \to I\!\!R\,;\ f$ continue et bornee $\}$ avec pour norme $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[1,\infty)} |f(t)|$. On considère l'application $F : E \to I\!\!R$ donnée par
$$F(f) \;=\; \int_1^\infty \frac{f^2(t)}{t^4}\,dt - \int_1^\infty \frac{f^3(t)}{t^2}\,dt \;.$$
Démontrer que
   (a) $F'(0) = 0$ et $F''(0)(h,h) > 0$ pour $h \neq 0$.
   (b) $0 \in E$ n'est pas un minimum relatif de F.
3. Montrer que la valeur maximale de l'expression
$$\frac{ax^2 + 2bxy + cy^2}{ex^2 + 2fxy + gy^2}$$
est la plus grande racine de $(eg - f^2)\lambda^2 - (ag - 2bf + ec)\lambda + (ac - b^2) \;=\; 0$.
4. Considérons la fonction
$$f(x_1,x_2,x_3) \;=\; \alpha x_1^2 e^{x_2} + x_2^2 e^{x_3} + x_3^2 e^{x_1}.$$
Démontrer que l'origine est un point critique. Pour quelle valeur de $\alpha \in I\!\!R$, l'origine est-elle un extremum de f?
5. Soit $m < n$ et A une matrice $m \times n$ de rang m. Parmi toutes les solutions de $Ax = b$ trouver à l'aide de multiplicateurs de Lagrange la solution pour laquelle $\|x\|_2$ est minimale. Donner une interprétation géométrique du résultat.
6. Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ et soit $F : E \to I\!\!R$ donnée par $F(y) \;=\; 2y(0)^3 - 3y(0)^2$. Démontrer les affirmations suivantes:
   (a) $y_0(x) \equiv 1$ est un minimum relatif de F, si l'on munit E de la norme $\|y\|_\infty = \max_{x\in[0,1]} |y(x)|$.
   (b) $y_0(x) \equiv 1$ n'est pas un minimum relatif de F, si l'on munit E de la norme $\|y\|_1 = \int_0^1 dx\, |y(x)|$.
7. Calculer géométriquement le minimum de $f|_{\mathcal{M}}$ où $f(x_1,x_2) \;=\; x_1^2 + x_2^2$, et
$$\mathcal{M} \;=\; \{(x_1,x_2)\,;\ g(x_1,x_2) = 0\} \quad \text{avec} \quad g(x_1,x_2) = x_2^2 - (x_1-1)^3 \;.$$
Montrer que le système
$$f'(x) - \lambda g'(x) \;=\; 0$$
ne possède pas de solution. Expliquer pourquoi.
8. Calculer la valeur maximale de
$$x^a y^c z^c \qquad (a,b,c,x,y,z > 0)$$
sujette à la condition $x^k + y^k + z^k \;=\; 1,\ (k > 0)$. En déduire l'inégalité
$$\left(\frac{u}{a}\right)^a \left(\frac{v}{b}\right)^b \left(\frac{w}{c}\right)^c \;\le\; \left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c} \;.$$
9. (Condition nécessaire). Soit E un espace vectoriel normé, et $U \subset E$ un ouvert. Soient $f : U \to I\!\!R$, $g : U \to I\!\!R^m$ deux fois différentiables en $a \in \mathcal{M}$, où $\mathcal{M} = \{x \in U\,;\ g(x) = 0\}$ et soit $g'(a)$ surjective. Montrer l'affirmation suivante: Si $f|_{\mathcal{M}}$ possède un minimum relatif en a, alors il existe $\lambda_1, \cdots, \lambda_m$ tels que
$$f'(a) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i'(a) \;=\; 0 \qquad \text{et} \qquad \left(f''(a) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i''(a)\right)(h,h) \ge 0$$
pour tout les h tels que $g'(a)h = 0$.
Indication. Appliquer le Théorème 1.3 à la situation de la démonstration du Théorème 2.2.

10. Calculer les extrema relatifs de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sur $\mathcal{M}$ où
$$\mathcal{M} \;=\; \left\{ (x,y,z)\,;\; \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1 \text{ et } z = x + y \right\} .$$
Vérifier les conditions suffisantes pour un extremum.

11. Calculer l'aire de révolution pour la fonction
$$y(x) \;=\; \frac{1}{\cosh\lambda}\cosh(x\cosh\lambda + \lambda)$$
et pour $0 \le x \le b$. Avec $b = 1.148$ comparer les valeurs obtenues pour $\lambda = -2.1$ et $\lambda = 0$ et celle de la solution de Goldschmidt (voir la Fig. 3.1).
Résultats numériques. 13.22, 11.33 et 12.55.

12. Considérer le problème de la brachystochrone (Exemple 3.6) avec les valeurs $b = 1$ et $B = 1$ (et utiliser la normalisation $2g = 1$).
    (a) Calculer le temps $T_1(y)$ pour la droite $y(x) = x$.
    (b) Démontrer que pour le cercle $y(x) = \sqrt{1-(x-1)^2}$ on obtient
    $$T_2(y) \;=\; \int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{-1/2}\, d\theta \;,$$
    (la solution proposée par Galilée). Démontrer que $T_2(y) < T_1(y)$ (utiliser une table d'intégrales si nécessaire).
    (c) Calculer le temps $T_3(y)$ pour la cycloïde (en utilisant les valeurs $C = 1.1458$ et $\varphi_{\text{end}} = 2.4120$).
    Résultats numériques. 2.8284, 2.6221, 2.5819.

13. Pour le problème de minimisation de
$$T(y) \;=\; \int_a^b \Big(2xy + (x^2 + 3y^2)y'\Big)\, dx$$
montrer que l'équation d'Euler-Lagrange s'annule identiquement. Trouver une fonction $f(x,y)$ telle que $L(x,y,y')dx = df(x,y)$ et montrer que l'intégrale $T(y)$ ne dépend que de $y(a)$ et $y(b)$, mais pas de la forme de $y(x)$.

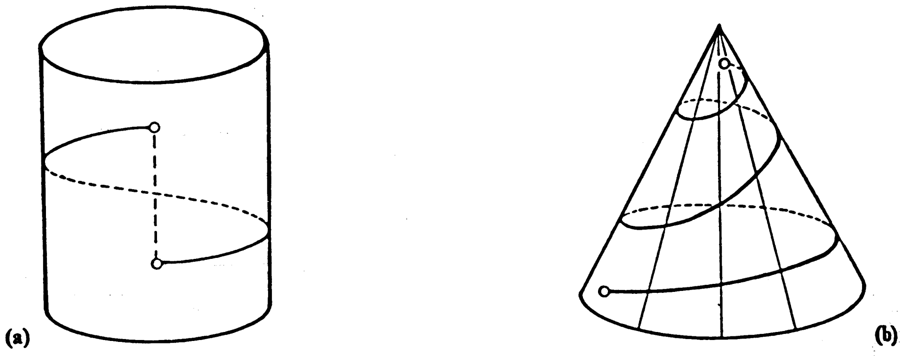
14. Déterminer les extrémales des problèmes suivants
$$\begin{aligned} T_1(y) &= \int_a^b \Big(2xy(x) - y^2(x) + 3y^2(x)y'(x)\Big)\, dx \\ T_2(y) &= \int_a^b x\sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx \end{aligned}$$

15. Déterminer les extrémales des problèmes suivants
$$T(y) = \int_0^1 (y'(x)^2 + 12xy(x))\, dx \qquad \text{avec} \quad y(0) = 2,\; y(1) = 3,$$
$$T(y) = \int_1^2 y'(x)(1 + x^2 y'(x))\, dx \qquad \text{avec} \quad y(1) = 3,\; y(2) = 2.$$

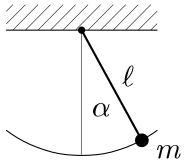
16. Trouver $\varphi : [a,b] \to I\!R$, $\varphi > 0$ avec $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$ et $c,d > 0$ qui minimise
$$\int_a^b \frac{\sqrt{1 + (\varphi')^2(x)}}{\varphi(x)}\, dx \;.$$
Remarque. Cette intégrale représente la longueur hyperbolique d'une courbe Γ dans le demi-plan de Poincaré $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C}\,;\, \Im(z) > 0\}$ paramétrisée par $(t, \varphi(t))$.

17. Déterminer la fonction $\varphi \mapsto \rho(\varphi)$ extrémale du problème de minimisation de
$$\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\frac{d\rho}{d\varphi})^2}\, d\varphi$$
avec $\rho(\alpha) = r$ et $\rho(\beta) = R$. Interpréter géométriquement le problème et sa solution. Même question pour la fonction $\rho \mapsto \varphi(\rho)$ et
$$\int_r^R \sqrt{1 + \rho^2(\frac{d\varphi}{d\rho})^2}\, d\rho$$
et les conditions $\varphi(r) = \alpha$ et $\varphi(R) = \beta$.

18. La figure ci-dessous a été copiée d'un livre publié en 1996. Les courbes dessinées peuvent-elle être des géodésiques?



19. Le *principe de Hamilton* dit que
$$\int L\, dt \quad \to \quad \min$$
où $L = T - U$, T est l'énergie cinétique et U est l'énergie potentielle.



   (a) Pour le pendule simple, considérons l'angle α comme la coordonnée généralisée. L'énergie cinétique est $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{m}{2}\ell^2\dot{\alpha}^2$ et l'énergie potentielle est $U = mgy = -mg\ell\cos\alpha$ (car $x = \ell\sin\alpha$ et $y = -\ell\cos\alpha$). Déterminer les équations d'Euler-Lagrange.

   (b) Déterminer les équations du mouvement du pendule sphérique de longueur l. En utilisant les coordonnées sphériques
$$x = l\cos\varphi\sin\theta\ ,\ x = l\sin\varphi\sin\theta\ ,\ z = l\cos\theta\ ,$$
   le résultat est donné par
$$\begin{aligned} \theta'' &= \frac{g}{l}\sin\theta + \sin\theta\cos\theta(\varphi')^2 \\ \sin\theta\varphi'' &= -2\cos\theta\theta'\varphi' \end{aligned} \tag{6.1}$$
   Indication. $T = m(x'^2 + y'^2 + z'^2)/2$, $U = mgz$.

20. On considère le problème
$$\int_a^b L(x, y(x), y'(x), y''(x))\, dx \quad \to \quad \min\ ,$$
où $y(a) = A_0$, $y'(a) = A_1$, $y(b) = B_0$ and $y'(b) = B_1$. Montrer que si $L(x, y, y', y'')$ et $y(x)$ sont suffisamment différentiables, alors une condition suffisante pour un extremum est
$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y(x), y'(x), y''(x)) - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'}(x, y(x), y'(x), y''(x)) + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial L}{\partial y''}(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0\ . \tag{6.2}$$
L'équation (6.2) s'appelle équation d'Euler-Poisson.

21. Résoudre le problème
$$\int_{-l}^{l} \left(\frac{\eta}{2} y''(x)^2 + \rho y(x) \right) dx \quad \to \quad \min .$$
avec $y(-l) = 0$, $y'(-l) = 0$, $y(l) = 0$ and $y'(l) = 0$ et η et ρ sont des constantes.