Chapitre III

Equations différentielles ordinaires

Dans de nombreuses applications, la dynamique d'un système peut être modélisée par des équations différentielles ordinaires. Par exemple, en mécanique (en utilisant la loi de Newton), en astronomie (le mouvement des planètes ou l'étude des galaxies), en dynamique moléculaire (le comportement des atomes), en chimie (des réactions chimiques), en électronique (circuits intégrés), en biologie (le développement de populations), etc. Au Chapitre II sur le calcul variationnel nous étions aussi confrontés aux équations différentielles ordinares (les équations d'Euler-Lagrange).

Dans quelques cas très rares on arrive à trouver la solution sous forme analytique (voir [HW95, II.7, II.8]). Mais, en général, on est obligé d'utiliser des méthodes numériques pour obtenir les solutions (voir le cours "Analyse Numérique"). Dans ce chapitre, nous allons traiter surtout des propriétés théoriques de solutions des équations différentielles ordinaires. En particulier, nous étudierons l'existence et l'unicité de solutions, leur sensibilité par rapport à des perturbations et leur comportement sur des longs intervalles (stabilité).

III.1 Terminologie et quelques exemples

Une *équation différentielle ordinaire* est donnée par une relation de la forme

$$F\Big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m)}\Big) = 0, \tag{1.1}$$

où $x \in \mathbb{R}$ et $y, y', \ldots, y^{(m)} \in \mathbb{R}^n$. La fonction F est définie dans un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n(m+1)}$. On dit que l'équation différentielle est de *l'ordre* m, si m est la dérivée maximale qui apparaît dans l'équation. Une fonction $y : I \to \mathbb{R}^n$ (où I est un intervalle dans $\mathbb{R}$) est une *solution* de (1.1), si elle est de classe $\mathcal{C}^m$ et si

$$F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(m)}(x)\Big) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad x \in I.$$

Exemple 1.1 (Clairaut 1734) Considérons l'équation différentielle

$$y - xy' + f(y') = 0. \tag{1.2}$$

Elle est donnée sous forme *implicite*, c.-à-d., par une équation nonlinéaire en y'. On vérifie sans problème que les droites $y(x) = Cx - f(C)$ sont des solutions (voir Fig. 1.1 pour les cas où $f(t) = 5(t^3 - t)/2$ (gauche) et $f(t) = t^2 + t$ (droite)). L'enveloppe de cette famille de droites est également une solution (voir Exercice 4). Si l'on fixe un point (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, on voit que dans un certain domaine il y a plusieurs solutions qui passent par le même

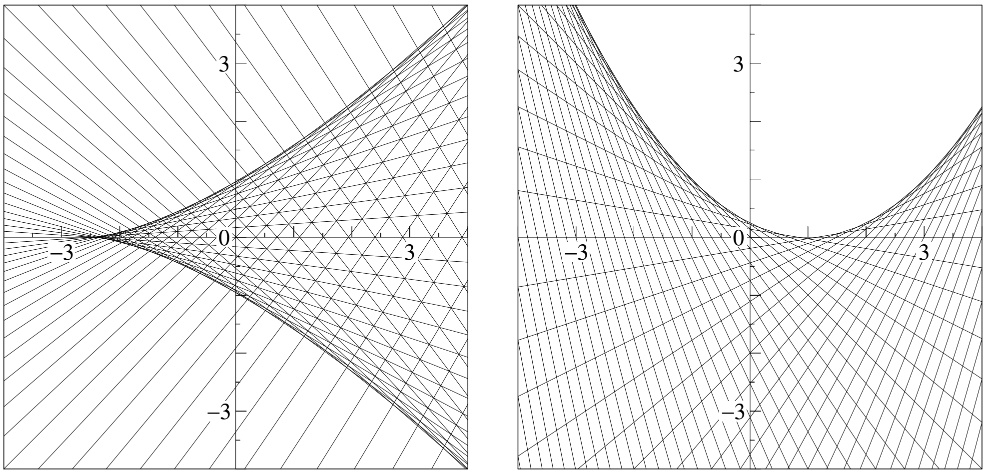


FIG. 1.1 – *Solutions de l'équation de Clairaut (Exemple 1.1)*[1]

(x_0, y_0), alors que dans une autre partie il y a une seule solution ou pas de solution du tout. L'explication de ce fait est que, pour (x, y) fixé, l'équation (1.2) admet trois, deux, une ou pas de solution pour y'.

Pour une équation différentielle de la forme (1.1) il est en général très difficile d'obtenir des résultats sur l'existence ou l'unicité de solutions (comme on a vu dans l'Exemple 1.1). Nous allons donc nous restreindre à la situation où l'equation (1.1) peut être résolue par rapport à la dérivée maximale $y^{(m)}$. Nous écrivons alors

$$y^{(m)} = g\Big(x, y, y', y'', \ldots, y^{(m-1)}\Big). \tag{1.3}$$

Une telle équation différentielle est dite *explicite*. Si l'on introduit des nouvelles variables pour les dérivées dans l'expression de droite de (1.3), par exemple $y_1 := y, y_2 := y', \ldots, y_m := y^{(m-1)}$, nous obtenons le système équivalent

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ &\cdots \\ y_{m-1}' &= y_m \\ y_m' &= g(x, y_1, \ldots, y_m) \end{aligned} \tag{1.4}$$

qui représente une équation différentielle d'ordre 1 pour le super-vecteur $(y_1, \ldots, y_m)^T$ (observons que les y_i sont en général aussi des vecteurs). En notant ce super-vecteur de nouveau par y et l'expression de droite par $f(x, y)$, le système (1.4) devient simplement $y' = f(x, y)$. Pour étudier des équations différentielles explicites il suffit alors de considérer le cas $m = 1$ dans (1.3).

Exemple 1.2 (prédateur et proie) L'expansion de deux populations (par exemple, $y(t)$ pour le nombre de lièvres et $z(t)$ pour le nombre de lynx) peut être modélisée par les équations de Volterra-Lotka

$$y' = y(\alpha - \beta z), \qquad z' = z(\gamma y - \delta), \tag{1.5}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des constantes données. Ceci implique que la population y croit si z est plus petit qu'une certaine valeur de seuil (α/β) alors que sinon elle décroit. Pour l'autre population, c'est le contraire. Pour étudier les solutions, divisons les deux équations et considérons

1. Le dessin de gauche de la Fig. 1.1 a été pris du livre [HNW93].

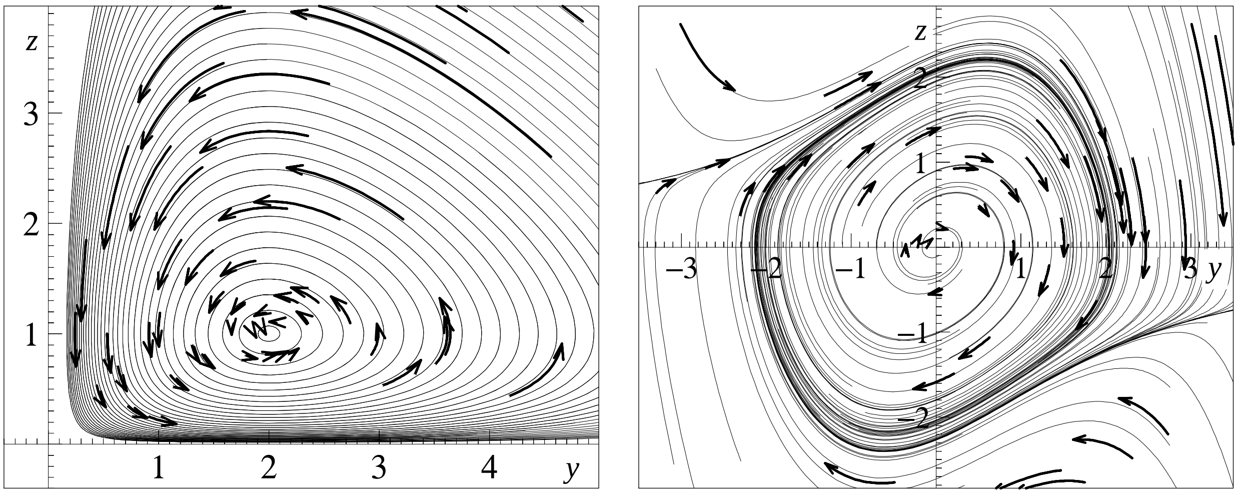


FIG. 1.2 – *Equations de Volterra-Lotka et de van der Pol*

y comme fonction de z (ou z comme fonction de y). On obtient ainsi (par séparation de variables)

$$\frac{dy}{dz} = \frac{y(\alpha - \beta z)}{z(\gamma y - \delta)} \qquad \text{ou} \qquad \frac{(\gamma y - \delta)}{y}\, dy = \frac{(\alpha - \beta z)}{z}\, dz.$$

Une intégration de la dérnière équation donne

$$\gamma\, y - \delta \ln y = \alpha \ln z - \beta\, z + Const. \tag{1.6}$$

Dans la Fig. 1.2 (gauche) sont déssinées des courbes de niveaux de la fonction (1.6) pour $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 1, \delta = 2$. Chaque solution $(y(t), z(t))$ reste sur une courbe de niveau pour tout $t \in I\!R$. Ceci suggère que les solutions de (1.5) sont périodiques.

Exemple 1.3 (van der Pol) L'équation van der Pol

$$y'' = \varepsilon(1 - y^2)y' - y, \qquad \varepsilon = 0.4 \tag{1.7}$$

est une perturbation de l'oscillateur harmonique $y'' + y = 0$, qui possède comme solution $y(t) = A\cos(t - \varphi)$, $z(t) = y'(t) = -A\sin(t - \varphi)$ (cercles). Les solutions de (1.7) dans le plan (y, z) sont dessinées dans la Fig. 1.2 (droite). On observe que toutes les solutions s'approchent d'une solution périodique qui est une déformation du cercle de rayon 2.

Dans le deux derniers exemples on constate que les courbes de solutions dans l'espace (y, z) ne s'intersectent jamais. Ceci signifie qu'il n'y a pas plusieurs solutions différentes passant par le même point. Notre premier but dans ce chapitre est d'étudier des conditions suffisantes pour qu'un problème

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{1.8}$$

possède une solution unique. On appelle x_0 et y_0 *valeurs initiales*, et le problème (1.8) avec valeurs initiales données s'appelle un *problème de Cauchy* ou un *problème aux valeurs initiales*.

III.2 Existence et unicité du problème de Cauchy

Considérons le problème de Cauchy

$$y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.1}$$

où $f : U \to I\!R^n$ (avec $U \subset I\!R \times I\!R^n$ ouvert) est une fonction continue. En intégrant l'équation différentielle entre x_0 et x on obtient *l'équation intégrale*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt. \tag{2.2}$$

Chaque solution de (2.1) est donc solution de (2.2). Le contraire est vrai aussi. Si une fonction continue $y(x)$ vérifie (2.2) sur un intervalle I, alors elle est automatiquement de classe $\mathcal{C}^1$ et elle vérifie (2.1).

Itération de Picard-Lindelöf L'équation (2.2) peut être considérée comme un problème à point fixe dans $\mathcal{C}(I)$. L'idée est d'appliquer la méthode des approximations successives (voir I.6). Elle s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} y_0(x) &= y_0 \qquad \text{(ou une fonction arbitraire)} \\ y_{k+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_k(t))\, dt. \end{aligned} \tag{2.3}$$

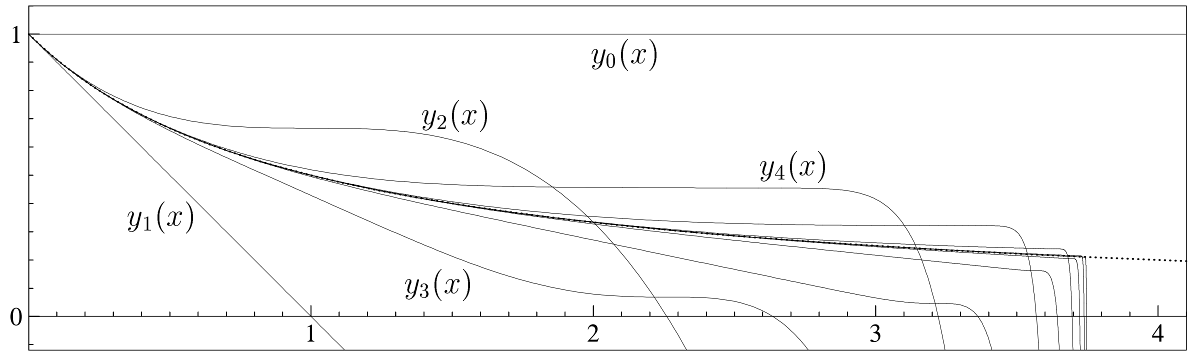


FIG. 2.1 – *Itération de Picard-Lindelöf pour le problème de l'Exemple 2.1*

Exemple 2.1 Considérons le problème

$$y' = -y^2, \qquad y(0) = 1$$

avec comme solution exacte $y(x) = 1/(1+x)$. Les premières approximations obtenues par l'itération de Picard-Lindelöf sont $y_0(x) = 1$, $y_1(x) = 1 - x$ et $y_2(x) = 1 - x + x^2 - x^3/3$ (voir la Fig. 2.1). On observe une convergence rapide vers la solution exacte dans l'intervalle $[0, 3.75]$. Pour x trop grand, l'itération diverge.

Lemme 2.2 *Soit* $A = \{(x,y) \in I\!R \times I\!R^n\,;\, |x - x_0| \le a, \|y - y_0\| \le b\}$, $f : A \to I\!R^n$ *une fonction continue et* $M = \max_{(x,y)\in A} \|f(x,y)\|$. *Pour* $\alpha := \min(a, b/M)$, *l'opérateur*

$$(Ty)(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt \tag{2.4}$$

est bien défini sur $B := \{y : [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \to I\!R^n\,;\, y$ *continue et* $\|y(x) - y_0\| \le b\}$ *et il satisfait* $T(B) \subset B$.

Démonstration. L'affirmation est une conséquence de

$$\|(Ty)(x) - y_0\| = \Big\|\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt\Big\| \le \int_{x_0}^{x} \|f(t, y(t))\|\, dt \le M|x - x_0| \le M\alpha \le b. \qquad \square$$

On dit qu'une fonction $f : A \to I\!R^n$ (avec A comme dans le lemme précédent) satisfait une *condition de Lipschitz* si

$$\|f(x,y) - f(x,z)\| \le L\,\|y - z\| \qquad \text{pour} \quad (x,y),(x,z) \in A. \tag{2.5}$$

La constante L s'appelle *constante de Lipschitz*. Remarquons que la condition (2.5) n'est pas une conséquence de la continuité de $f(x,y)$. Par exemple, la fonction $\sqrt{|y|}$ est continue sans vérifier (2.5). D'autre part, chaque fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifie (2.5). Ceci est une conséquence du théorème des accroissements finis (voir I.5).

Si $f(x,y)$ satisfait une condition de Lipschitz et si $\alpha L < 1$, l'opérateur T de (2.4) est une contraction sur B (notation comme dans le Lemme 2.2). Dans cette situation on peut appliquer le Théorème du point fixe de Banach (voir I.6) pour conclure que $Ty = y$ possède une solution unique dans B. Nous allons démontrer l'existence et l'unicité d'une solution sans cette condition supplémentaire sur α.

Théorème 2.3 (existence et unicité du problème de Cauchy) *Considérons l'ensemble $A = \{(x,y) \in I\!R \times I\!R^n\,;\, |x - x_0| \le a, \|y - y_0\| \le b\}$ et supposons que $f : A \to I\!R^n$*

- *soit continue,*
- *satisfasse une condition de Lipschitz.*

Alors, le problème de Cauchy $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ possède une solution unique sur $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, où $\alpha = \min(a, b/M)$ et $M = \max_{(x,y)\in A} \|f(x,y)\|$.

Démonstration. Existence. L'idée est de démontrer que l'itération de Picard-Lindelöf converge uniformément sur I vers une solution du problème de Cauchy. Dans une première partie nous allons démontrer que

$$\|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| \le M L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \qquad \text{pour} \quad |x - x_0| \le \alpha. \tag{2.6}$$

Pour $k = 0$ avec pour $y_0(x) = y_0$, cette estimation suit de $\|\int_{x_0}^x f(t, y(t))\,dt\| \le M\,|x - x_0|$. Supposons qu'elle soit vraie pour $k - 1$. Alors, on a pour $x_0 \le x \le x_0 + \alpha$ que

$$\begin{aligned} \|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| &\le \int_{x_0}^x \|f(t, y_k(t)) - f(t, y_{k-1}(t))\|\,dt \le L \int_{x_0}^x \|y_k(t) - y_{k-1}(t)\|\,dt \\ &\le M L^k \int_{x_0}^x \frac{|t - x_0|^k}{k!}\,dt = M L^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \end{aligned}$$

(la démonstrations pour $x_0 - \alpha \le x \le x_0$ est analogue).

De l'estimation (2.6) nous déduisons que $\{y_k(x)\}$ est une suite de Cauchy pour la norme $\|y\|_\infty = \max_{x\in I} \|y(x)\|$. En effet,

$$\begin{aligned} \|y_{k+m}(x) - y_k(x)\| &\le \|y_{k+m}(x) - y_{k+m-1}(x)\| + \ldots + \|y_{k+1}(x) - y_k(x)\| \\ &\le \frac{M}{L}\Big(\frac{(L|x - x_0|)^{k+m}}{(k+m)!} + \ldots + \frac{(L|x - x_0|)^{k+1}}{(k+1)!}\Big) \le \frac{M}{L} \sum_{j\ge k+1} \frac{(L\alpha)^j}{j!}, \end{aligned}$$

ce qui est borné par le reste d'une série convergente. Donc, cette expression est plus petite que ε si k est suffisamment grand. Comme l'espace des fonctions continues avec la norme $\|y\|_\infty$ est complet, la suite $\{y_k(x)\}$ converge vers une fonction continue $y : I \to I\!R^n$.

Pour démontrer que cette fonction $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy, nous passons à la limite $k \to \infty$ dans (2.3). Comme $\{y_k(x)\}$ converge uniformément et $f(x,y)$ est uniformément continue sur le compact A, la suite $\{f(x, y_k(x))\}$ converge uniformément vers $f(x, y(x))$. On peut donc échanger la limite avec l'intégration dans (2.3) et on voit que $y(x)$ est solution de l'équation intégrale (2.2).

Unicité. Supposons que $y(x)$ et $z(x)$ soient deux solutions sur I. Ceci implique que $y(x) - z(x) = \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\, dt$. On en déduit que $\|y(x) - z(x)\| \leq 2M|x - x_0|$. Comme dans la première partie de la démonstration nous trouvons par récurrence que pour tout $k \geq 0$

$$\|y(x) - z(x)\| \leq 2ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} \leq \frac{2M}{L} \frac{(L\alpha)^{k+1}}{(k+1)!}.$$

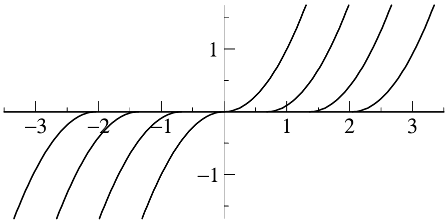
La limite $k \to \infty$ montre que $\|y(x) - z(x)\| = 0$ pour tout $x \in I$. □

III.3 Théorème de Peano

Montrons d'abord par un exemple qu'on ne peut pas omettre l'hypothèse sur la condition de Lipschitz pour conclure l'existence et l'unicité d'une solution du problème de Cauchy.

Exemple 3.1 Considérons l'équation différentielle

$$y' = 2\sqrt{|y|}.$$



On vérifie que $y(x) \equiv 0$ ainsi que $y(x) = (x - c)^2$ pour $x \geq c$ et $y(x) = -(c - x)^2$ pour $x \leq c$ sont des solutions. Le problème de Cauchy avec pour valeur initiale $y(0) = 0$ possède donc une infinité de solutions (voir le dessin). Observons que $f(x, y) = 2\sqrt{|y|}$ ne satisfait pas une condition de Lipschitz et que le Théorème 2.3 ne peut donc pas être appliqué.

Le but de ce paragraphe est de démontrer l'existence (mais pas l'unicité) d'une solution de (2.1) sans utiliser une condition de Lipschitz. Dans cette situation l'itération de Picard-Lindelöf n'est pas utile comme le démontre l'Exercice 10. Nous considérons donc une autre suite de fonctions approchant une solution du problème de Cauchy.

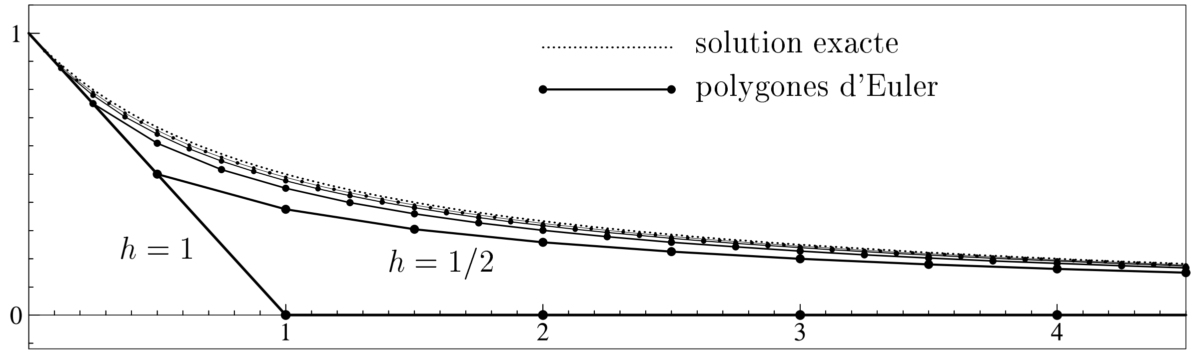


FIG. 3.1 – *Polygones d'Euler pour $y' = -y^2$, $y(0) = 1$ avec solution exacte $y(x) = 1/(1 + x)$*

Polygones d'Euler (Euler 1768) L'idée est d'approximer la solution localement par sa tangente $y(x+h) \approx y(x) + hf(x, y(x))$. Pour un $h > 0$ donné, nous considérons alors la suite $\{x_n, y_n\}_{n\geq 0}$ donnée par

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \qquad x_{n+1} = x_n + h,$$

et nous notons par $y_h(x)$ la fonction linéaire par morceaux qui passe par les points (x_n, y_n). Ces polygones sont dessinés pour le problème $y' = -y^2$, $y(0) = 1$ et pour $h = 1, 1/2, \ldots$ dans la Fig. 3.1.

Lemme 3.2 *Soit* $A = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\,;\, |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ *une fonction continue,* $M = \max_{(x,y)\in A} \|f(x, y)\|$ *et* $\alpha := \min(a, b/M)$*. Pour* $h = \alpha/N$ *(avec* $N \in \mathbb{N}$*), le polygone d'Euler satisfait* $(x, y_h(x)) \in A$ *pour* $x \in [x_0, x_0+\alpha]$ *et on a l'estimation*

$$\|y_h(x) - y_h(\bar{x})\| \leq M\,|x - \bar{x}| \qquad \textit{pour} \quad x, \bar{x} \in [x_0, x_0 + \alpha]. \tag{3.1}$$

Démonstration. Par récurrence on voit que $(x_n, y_n) \in A$ pour $n = 0, 1, \ldots, N$. En effet, on a $\|y_{n+1} - y_n\| \leq hM$ et $\|y_{n+1} - y_0\| \leq (n+1)hM \leq \alpha M \leq b$ si $n + 1 \leq N$. Ceci implique que $(x, y_h(x)) \in A$ pour tout $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$. L'estimation (3.1) est une conséquence du fait que $y_h(x)$ est linéaire par morceaux et que la pente est partout bornée par M. □

Définition 3.3 Une famille de fonctions $f_j : I \to \mathbb{R}^n$ (où I est un intervalle) s'appelle *équicontinue*, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\forall j \quad \forall x, \bar{x} \quad \Big(|x - \bar{x}| < \delta \implies \|f_j(x) - f_j(\bar{x})\| < \varepsilon \Big).$$

Il est important que δ ne dépend que de ε et non de j.

Théorème 3.4 (Arzelà-Ascoli 1895) *Soit* $f_j : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *une famille de fonctions satisfaisant*

- $\{f_j(x)\}$ *est équicontinue,*
- *pour tout* $x \in [a, b]$ *il existe un* $M(x) \in \mathbb{R}$ *tel que* $\|f_j(x)\| \leq M(x)$ *pour tout* j*.*

Alors, la famille $\{f_j(x)\}$ *possède une sous-suite* $\{g_n(x)\}_{n\geq 1}$ *qui converge uniformément vers une fonction continue* $g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$*.*

Démonstration. Construction de la sous-suite. L'ensemble $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ est dénombrable et dense dans $[a, b]$. Il peut donc être écrit comme $\mathbb{Q} \cap [a, b] = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$. La famille $\{f_j(x_1)\}$ est bornée dans $\mathbb{R}^n$ et, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, possède une sous-suite convergente. Notons-la par $\{f_{1i}(x_1)\}_{i\geq 1}$. Donc

$$f_{11}(x), f_{12}(x), f_{13}(x), \ldots \qquad \text{converge pour } x_1.$$

Considérons maintenant la suite $\{f_{1i}(x_2)\}_{i\geq 1}$. De nouveau, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, cette suite possède une sous-suite convergente et on trouve une suite telle que $f_{21}(x), f_{22}(x), f_{23}(x), \ldots$ converge pour x_1 et pour x_2. Après n étapes on trouve une sous-suite $\{f_{ni}(x)\}_{i\geq 1}$ de $\{f_j(x)\}$ telle que

$$f_{n1}(x), f_{n2}(x), f_{n3}(x), \ldots \qquad \text{converge pour } x_1, x_2, \ldots, x_n.$$

L'idée est de considérer la "suite diagonale" $g_n(x) := f_{nn}(x)$. Cette suite converge pour tout $x_\ell \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$, car $\{g_n(x_\ell)\}_{n\geq \ell}$ est une sous-suite de $\{f_{\ell n}(x_\ell)\}_{n\geq\ell}$, qui converge.

Convergence uniforme. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geq 1$

$$|x - \bar{x}| < \delta \implies \|g_n(x) - g_n(\bar{x})\| < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Choisissons un nombre fini de points $x_1, x_2, \ldots, x_{q-1} \in \mathbb{Q} \cap [a,b]$ satisfaisant $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{q-1} < x_q = b$ et $x_{i+1} - x_i < \delta$. Pour un $x \in [a,b]$, notons par ℓ l'indice tel que $x \in [x_\ell, x_{\ell+1}]$. Utilisons l'inégalité du triangle:

$$\|g_n(x) - g_m(x)\| \leq \|g_n(x) - g_n(x_\ell)\| + \|g_n(x_\ell) - g_m(x_\ell)\| + \|g_m(x_\ell) - g_m(x)\|.$$

Par (3.2) on a que $\|g_n(x) - g_n(x_\ell)\| + \|g_m(x_\ell) - g_m(x)\| < 2\varepsilon$. Comme $\{g_n(x_\ell)\}_{n\geq 1}$ est une suite convergente, il existe un entier N_ℓ tel que $\|g_n(x_\ell) - g_m(x_\ell)\| < \varepsilon$ pour tout $n, m \geq N_\ell$. En prenant $N := \max\{N_\ell\,;\, \ell = 0, 1, \ldots, q\}$, on obtient alors $\|g_n(x) - g_m(x)\| < 3\varepsilon$ pour $n, m \geq N$. Comme N ne dépend pas de x, la convergence uniforme de $\{g_n(x)\}_{n\geq 1}$ sur $[a,b]$ est démontrée. La continuité de la fonction limite suit alors d'un résultat du cours "Analyse I" (voir [HW95, III.4]). $\square$

Théorème 3.5 (Peano 1890) *Considérons l'ensemble* $A = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n\,;\, |x - x_0| \leq a, \|y - y_0\| \leq b\}$ *et supposons que* $f : A \to \mathbb{R}^n$ *soit continue, que* $\|f(x,y)\| \leq M$ *sur* A *et que* $\alpha = \min(a, b/M)$. *Alors, le problème de Cauchy* $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ *possède au moins une solution sur* $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$.

Démonstration. Nous considérons les polygones d'Euler $y_h(x)$ pour $h = \alpha/N$ avec $N \in \mathbb{N}$. Cette suite est bornée ($\|y_h(x) - y_0\| \leq M\,|x - x_0| \leq M\alpha$) et équicontinue (Lemme 3.2). Par le Théorème de Arzelà-Ascoli, la famille $\{y_h(x)\}$ possède une sous-suite qui converge uniformément vers une fonction continue $y : [x_0, x_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^n$. Il reste à démontrer que $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy. L'existence d'une solution sur $[x_0 - \alpha, x_0]$ se démontre de la même manière.

Pour un $x \in [x_0, x_0 + \alpha]$ donné, notons par $\ell = \ell(h)$ l'indice tel que $x \in [x_\ell, x_{\ell+1}]$ où $x_\ell = x_0 + \ell h$. La valeur de $y_h(x)$ peut donc être écrite comme

$$y_h(x) - y_0 = hf(x_0, y_0) + \ldots + hf(x_{\ell-1}, y_{\ell-1}) + (x - x_\ell) f(x_\ell, y_\ell) \tag{3.3}$$

où (x_j, y_j) sont les approximations obtenues par la méthode d'Euler. Comme $f(t, y(t))$ est continue et donc intégrable au sens de Riemann, on a que

$$\int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt = hf(x_0, y(x_0)) + \ldots + hf(x_{\ell-1}, y(x_{\ell-1})) + (x - x_\ell) f(x_\ell, y(x_\ell)) + r(h) \tag{3.4}$$

avec $r(h) \to 0$ pour $h \to 0$. La continuité uniforme de f sur A et la convergence uniforme de la sous-suite de $\{y_h(x)\}$ vers $y(x)$ impliquent que $\|f(x, y_h(x)) - f(x, y(x))\| < \varepsilon$ pour h suffisamment petit (évidemment seulement pour les h tels que $y_h(x)$ appartienne à la sous-suite). En utilisant $y_h(x_j) = y_j$, la différence de (3.3) et (3.4) donne l'estimation

$$\Big\| y_h(x) - y_0 - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt \Big\| \leq |x - x_0|\,\varepsilon + \|r(h)\| \leq \alpha\varepsilon + \|r(h)\|,$$

ce qui devient arbitrairement petit pour $h \to 0$. La fonction continue $y(x)$ satisfait donc l'équation intégrale (2.2), et elle est une solution du problème de Cauchy. $\square$

III.4 Prolongement des solutions et existence globale

Même si la fonction $f(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ partout dans $I\!R \times I\!R^n$, on n'a pas la garantie que la solution du problème de Cauchy $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ existe pour tout $x \in I\!R$. Par exemple, le problème $y' = 1 + y^2$ possède $y(x) = \tan(x - c)$ comme solution et cette solution ne peut pas être prolongée à un intervalle plus grand que $(c - \pi/2, c + \pi/2)$, car $y(x) \to \pm\infty$ si $x \to c \pm \pi/2$.

Nous allons démontrer que, pour un problème où $f(x,y)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I\!R \times I\!R^n$, on a seulement deux possibilités: soit la solution existe sur $[x_0, \infty)$, soit elle tend vers l'infini en temps fini, c.-à-d., elle existe sur $[x_0, \omega_+)$ avec $\omega_+ < \infty$ et on a que $\|y(x)\| \to \infty$ si $x \to \omega_+$. On a des affirmations analogues pour $x < x_0$.

Définition 4.1 Une fonction $f : U \to I\!R^n$ (où U est un ouvert de $I\!R \times I\!R^n$) satisfait *localement une condition le Lipschitz*, si pour tout $(x_0, y_0) \in U$ il existe un voisinage $V \subset U$ tel que f satisfait une condition de Lipschitz sur V (voir (2.5)).

Si la fonction $f : U \to I\!R^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$, elle satisfait localement une condition de Lipschitz. Ceci est une conséquence immédiate du théorème des accroissements finis.

Lemme 4.2 *Soit $U \subset I\!R \times I\!R^n$ un ouvert et supposons que $f : U \to I\!R^n$ soit continue et qu'elle satisfasse localement une condition de Lipschitz. Alors, pour tout $(x_0, y_0) \in U$ il existe un intervalle ouvert $I_{\max} = (\omega_-, \omega_+)$ avec $-\infty \le \omega_- < x_0 < \omega_+ \le \infty$ ayant les propriétés suivantes:*

- *le problème $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$ possède une solution unique sur $I_{\max}$,*
- *si $z : I \to I\!R^n$ est une solution de $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$, alors $I \subset I_{\max}$ et $z = y|_I$.*

Démonstration. a) Soient $y : I \to I\!R^n$ et $z : J \to I\!R^n$ deux solutions de $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ sur des intervalles I et J contenant x_0. Alors, on a $y(x) = z(x)$ sur $I \cap J$. Pour le démontrer, supposons (par l'absurde) qu'il existe un $\bar{x} \in I \cap J$ tel que $y(\bar{x}) \neq z(\bar{x})$ et considérons le premier point où les deux solutions se séparent. Le Théorème 2.3 montre qu'un tel point ne peut pas exister.

b) Définissons l'intervalle

$$I_{\max} := \bigcup \left\{ I \;\middle|\; \begin{array}{l} I \text{ est un intervalle ouvert, } x_0 \in I \text{ et} \\ y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \text{ possède une solution sur } I \end{array} \right\}. \qquad (4.1)$$

Cet intervalle est ouvert, car il est l'union d'intervalles ouverts. Nous définissons maintenant $y : I_{\max} \to I\!R^n$ de la manière suivante: chaque $x \in I_{\max}$ est contenu dans un intervalle I où le problème de Cauchy possède une solution. On peut donc définir $y(x)$ comme la valeur de cette solution. La partie (a) montre que la fonction $y(x)$ est bien définie sur $I_{\max}$ et que $y(x)$ est une solution du problème de Cauchy. L'unicité de la solution est une conséquence du Théorème 2.3. $\square$

Pour l'exemple $y' = 1 + y^2$ du début de ce paragraphe, nous avons $I_{\max} = I_{\max}(x_0, y_0) = (c - \pi/2, c + \pi/2)$ où $c = x_0 - \arctan y_0$.

Théorème 4.3 *Supposons que la fonction $f : U \to I\!R^n$ (U un ouvert de $I\!R \times I\!R^n$) soit continue et qu'elle satisfasse localement une condition de Lipschitz sur U. Alors, chaque solution de $y' = f(x,y)$ possède un prolongement jusqu'au bord de U. Plus précisément, soit $y : I_{\max} \to I\!R^n$ la solution passant par $(x_0, y_0) \in U$, alors pour tout compact $K \subset U$ il existe $x_1, x_2 \in I_{\max}$ avec $x_1 < x_0 < x_2$ tel que $(x_1, y(x_1)) \notin K$ et $(x_2, y(x_2)) \notin K$.*

Démonstration. Soit $I_{\max} = (\omega_-, \omega_+)$. Si $\omega_+ = \infty$, il est évident qu'il existe un $x_2 > x_0$ satisfaisant $(x_2, y(x_2)) \notin K$ (car K est borné). Considérons alors le cas où $\omega_+ < \infty$, et supposons par l'absurde qu'il existe un compact $K \subset U$ tel que $(x, y(x)) \in K$ pour tout $x \in (x_0, \omega_+)$. Comme $f(x, y)$ est bornée sur K, nous avons que

$$\|y(x) - y(\bar{x})\| = \Big\| \int_{\bar{x}}^{x} f(t, y(t))\, dt \Big\| \leq M \cdot |x - \bar{x}| < \varepsilon$$

si x et $\bar{x}$ sont suffisamment proches de ω_+. Par conséquent, la limite $\lim_{x\to\omega_+} y(x) = y_+$ existe. Le point (ω_+, y_+) est dans $K \subset U$, car K est fermé. On peut donc appliquer le Théorème 2.3 qui garantit l'existence d'une solution de $y' = f(x, y)$, $y(\omega_+) = y_+$ dans un voisinage de ω_+. Ceci contredit la maximalité de l'intervalle $I_{\max}$. L'existence de x_1 vérifiant les propriétés démandées est démontrée de la même manière. □

Une équation différentielle où f ne dépend que de y s'appelle une *équation différentielle autonome*. Si $y(x)$ est une solution de $y' = f(y)$, alors $z(x) = y(x - c)$ est aussi une solution (on vérifie que $z'(x) = y'(x - c) = f(y(x - c)) = f(z(x))$). On peut donc fixer la valeur de x_0 à 0.

Théorème 4.4 (systèmes dissipatifs) *Supposons que $f : I\!R^n \to I\!R^n$ satisfasse localement une condition de Lipschitz et que*

$$\langle f(y), y - v\rangle \leq \alpha - \beta\, \|y\|^2 \tag{4.2}$$

est vérifié avec un vecteur $v \in I\!R^n$ et avec $\alpha \geq 0$ et $\beta > 0$. Alors, quelque soit y_0, le problème

$$y' = f(y), \qquad y(0) = y_0 \tag{4.3}$$

possède une solution qui existe pour tout $x \geq 0$.

Démonstration. Considérons les boules $B_0 = \{y \in I\!R^n\ ;\ \|y\|^2 \leq \alpha/\beta\}$ et $B = \{y \in I\!R^n\ ;\ \|y - v\| \leq R\}$ avec un $R > \|v\| + \sqrt{\alpha/\beta}$ suffisamment grand pour que B_0 soit contenue dans l'intérieur de B. Pour $y \in \partial B$, on a $\langle f(y), y - v\rangle < 0$, ce qui signifie que le vecteur $f(y)$ pointe vers l'intérieur de B. Les solutions ne peuvent donc pas sortir de la boule B. Si l'on choisit R assez grand pour que $y_0 \in B$, l'existence globale de la solution sur $[0, \infty)$ est une conséquence du Théorème 4.3. □

Exemple 4.5 Les équations de Lorenz sont données par

$$\begin{aligned} y_1' &= -\sigma y_1 + \sigma y_2 \\ y_2' &= -y_1 y_3 + r y_1 - y_2 \\ y_3' &= y_1 y_2 - b y_3 \end{aligned} \tag{4.4}$$

où $\sigma = 10$, $r = 28$ et $b = 8/3$. La Fig. 4.1 montre la première composante en fonction du temps pour $0 \leq x \leq 100$ et la Fig. 4.2 montre la solution dans l'espace de phase pour

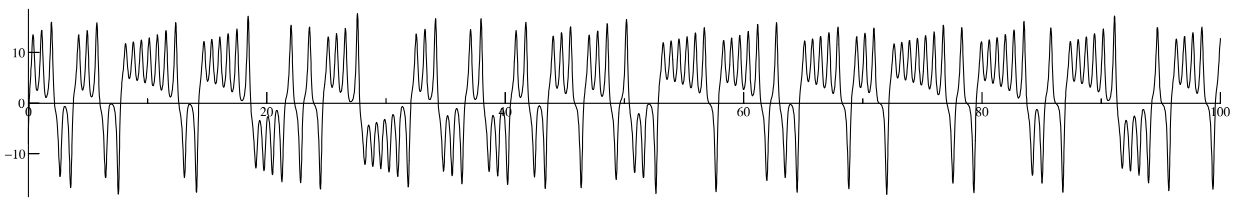


FIG. 4.1 – *Première composante de (4.4) en fonction du temps*

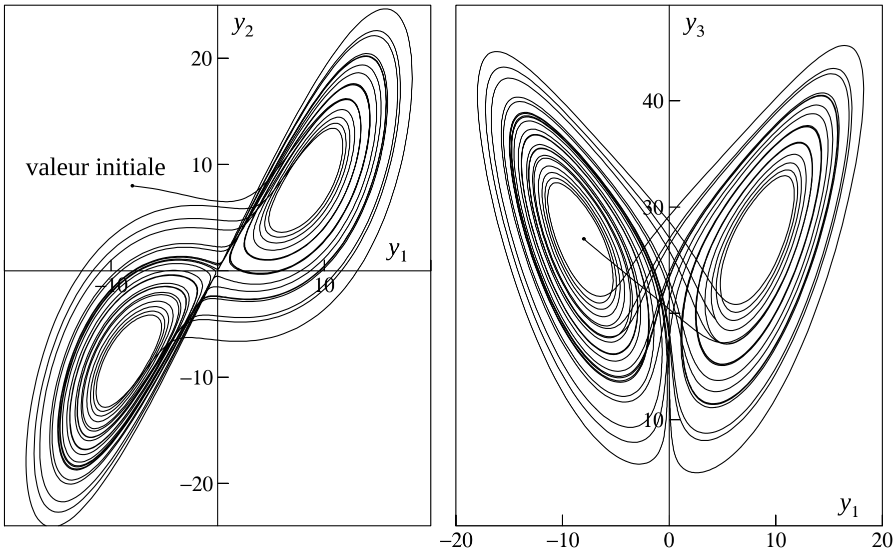


FIG. 4.2 – *Deux vues de la solution de l'équation de Lorenz (4.4)*

$0 \le x \le 30$ avec comme valeurs initiales $y_1(0) = -8$, $y_2(0) = 8$ et $y_3(0) = 27$. Elle est très "chaotique".

Nous allons montrer que ce système est dissipatif. Pour celà, nous considérons un vecteur $v = (0, 0, \gamma)^T$ et nous obtenons

$$\langle f(y), y - v\rangle = -\sigma y_1^2 - y_2^2 - b y_3^2 + (\sigma + r - \gamma) y_1 y_2 + b\gamma y_3.$$

Avec le choix $\gamma = \sigma + r$ et en utilisant l'inégalité $2\gamma y_3 \le y_3^2 + \gamma^2$ (ceci est une conséquence de $(y_3 - \gamma)^2 \ge 0$), on voit que (4.2) est vérifié avec pour $\alpha = b\gamma^2/2$ et pour $\beta = \min(\sigma, 1, b/2)$. La solution du sytème de Lorenz existe donc pour tout $x \in [0, \infty)$, quelle que soit sa valeur initiale.

III.5 Inégalités différentielles et solutions approchées

Une solution approchée du problème de Cauchy

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{5.1}$$

est une fonction $v(x)$ pour laquelle le défaut $\delta(x) := v'(x) - f(x, v(x))$ est petit. On cherche à obtenir des estimations pour $\|v(x) - y(x)\|$. Souvent la fonction $v(x)$ n'est pas partout différentiable (pensons aux polygones d'Euler). Nous introduirons alors la dérivée de Dini et nous utiliserons un résultat sur les inégalités différentielles pour obtenir une estimation de $\|v(x) - y(x)\|$.

Définition 5.1 Soit $m : I \to I\!R$ une fonction continue sur l'intervalle I. La *dérivée de Dini* est définie par

$$D_+ m(x) \;=\; \liminf_{h \to 0+} \;\frac{m(x+h) - m(x)}{h}.$$

Si m possède une dérivée à droite en x, alors $D_+ m(x) = m'(x + 0)$. Dans cette situation, on a pour toute norme

$$D_+\|m(x)\| \le \|m'(x + 0)\|. \tag{5.2}$$

Ceci découle de l'inégalité $\|m(x+h)\|-\|m(x)\| \leq \|m(x+h)-m(x)\|$. Un exemple sans dérivée à droite en 0 est la fonction $m(x) = x\sin(1/x)$. Pour cette fonction, on a $D_+m(0) = -1$.

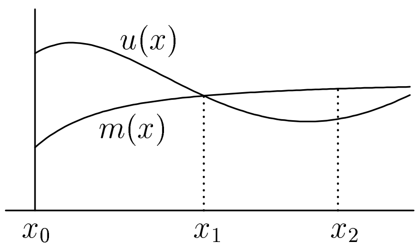
Théorème 5.2 *Soient $m : [x_0, x_0+a) \to \mathbb{R}$ et $u : [x_0, x_0+a) \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues satisfaisant*

$$\begin{aligned} D_+m(x) &\leq g(x, m(x)) \qquad \textit{pour } x \in [x_0, x_0+a) \\ D_+u(x) &> g(x, u(x)) \qquad \textit{pour } x \in [x_0, x_0+a) \\ m(x_0) &\leq u(x_0). \end{aligned}$$

Alors, on a $m(x) \leq u(x)$ pour tout $x \in [x_0, x_0+a)$ (ici, g est une fonction arbitraire à deux variables réelles).

Démonstration. Supposons qu'il existe $x_2 \in (x_0, x_0+a)$ avec $m(x_2) > u(x_2)$. Alors, la valeur

$$x_1 := \inf\{x \; ; \; x \geq x_0 \text{ et } m(t) > u(t) \text{ sur } [x, x_2]\}$$



est bien définie et, par continuité des fonctions m et u, on a que $m(x_1) = u(x_1)$ et $m(x_1+h) > u(x_1+h)$ pour $h > 0$ suffisamment petit. Par conséquent,

$$\frac{m(x_1+h) - m(x_1)}{h} > \frac{u(x_1+h) - u(x_1)}{h}$$

pour $h > 0$ et petit. On en déduit que $D_+m(x_1) \geq D_+u(x_1)$. Mais ceci est en contradiction avec $D_+m(x_1) \leq g(x_1, m(x_1)) = g(x_1, u(x_1)) < D_+u(x_1)$. □

Le résultat suivant est fondamental pour toutes les estimations concernant des solutions approchées.

Théorème 5.3 (lemme fondamental) *Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue, $y : [x_0, x_0+a) \to \mathbb{R}^n$ une solution de $y' = f(x,y)$ et $v : [x_0, x_0+a) \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue qui possède partout une dérivée à droite. Alors, les estimations*

$$\begin{aligned} &\|v'(x+0) - f(x, v(x))\| \leq \delta \qquad \textit{(v est solution δ-approchée)} \\ &\|f(x, y(x)) - f(x, v(x))\| \leq L\,\|y(x) - v(x)\| \end{aligned}$$

impliquent que pour tout $x \in [x_0, x_0+a)$

$$\|y(x) - v(x)\| \leq \|y(x_0) - v(x_0)\|\, e^{L(x-x_0)} + \frac{\delta}{L}\Big(e^{L(x-x_0)} - 1\Big).$$

Démonstration. Posons $m(x) := \|y(x) - v(x)\|$. En utilisant (5.2) et les hypothèses du théorème, nous avons que

$$D_+m(x) \leq \|y'(x) - v'(x+0)\| \leq L\,m(x) + \delta.$$

Définissons maintenant $u(x)$ par $u(x_0) = m(x_0)$ et

$$u'(x) = L\,u(x) + \delta + \varepsilon > L\,u(x) + \delta$$

avec un $\varepsilon > 0$. La solution de cette équation différentielle est donnée par

$$u(x) = u(x_0)\, e^{L(x-x_0)} + \frac{(\delta+\varepsilon)}{L}\Big(e^{L(x-x_0)} - 1\Big).$$

Le Théorème 5.2 avec pour $g(x,y) = Ly + \delta$ montre que

$$\|y(x) - v(x)\| \leq \|y(x_0) - v(x_0)\|\, e^{L(x-x_0)} + \frac{(\delta+\varepsilon)}{L}\Big(e^{L(x-x_0)} - 1\Big)$$

pour tout $\varepsilon > 0$. La limit $\varepsilon \to 0$ donne l'affirmation du théorème. □

Dépendance continue des solutions des valeurs initiales Supposons que $f : U \to I\!R^n$ vérifie les hypothèses du Théorème 2.3 (existence et unicité du problème de Cauchy). Nous exprimons par $y(x, x_0, y_0)$ la dépendance de la solution des valeurs initiales. Cette fonction de trois variables est définie sur

$$D = \Big\{(x, x_0, y_0) \ ; \ (x_0, y_0) \in U \text{ et } x \in I_{\max}(x_0, y_0)\Big\}. \tag{5.3}$$

Nous allons démontrer que $y : D \to I\!R^n$ est une fonction continue. Remarquons que l'unicité de la solution implique que

$$y(x, x_0, y_0) = y(x, x_1, y(x_1, x_0, y_0)). \tag{5.4}$$

En effet, les deux fonctions de cette identité sont solutions de $y' = f(x, y)$ et elles passent par le même point $(x_1, y(x_1, x_0, y_0))$.

Lemme 5.4 *Supposons que $f : U \to I\!R^n$ (U un ouvert de $I\!R \times I\!R^n$) soit continue et qu'elle satisfasse localement une condition de Lipschitz. Alors, pour tout compact $K \subset U$ il existe un $L \geq 0$ tel que*

$$\|f(x, y) - f(x, z)\| \leq L\,\|y - z\| \qquad \textit{pour tout } (x, y), (x, z) \in K.$$

Démonstration. Supposons le contraire. Il existe alors des suites $(x_n, y_n), (x_n, z_n)$ dans K telles que

$$\|f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n)\| > n\,\|y_n - z_n\|. \tag{5.5}$$

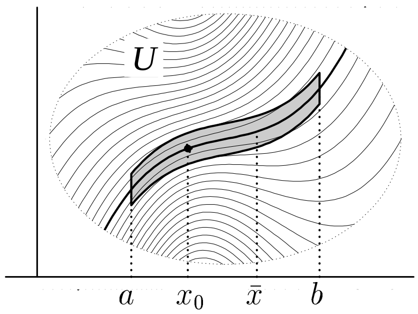
Soit (x, y) un point d'accumulation de la suite (x_n, y_n) (il existe par le théorème de Bolzano-Weierstrass). Par hypothèse, la fonction satisfait une condition de Lipschitz dans un voisinage V de (x, y). Comme $f(x, y)$ est bornée sur K et comme $\|y_n - z_n\| < 2M/n$ où $M = \max_{(x,y)\in K} \|f(x, y)\|$, il y a un nombre infini d'indices n pour lesquelles (x_n, y_n) et (x_n, z_n) sont dans V. La condition de Lipschitz sur V est alors en contradiction avec (5.5). □

Théorème 5.5 *Supposons que $f : U \to I\!R^n$ (U un ouvert de $I\!R \times I\!R^n$) soit continue et qu'elle satisfasse localement une condition de Lipschitz. Alors, l'ensemble D de (5.3) est ouvert et la solution $y : D \to I\!R^n$ du problème de Cauchy est une fonction continue de trois variables (x, x_0, y_0).*

Démonstration. Soit $(\bar{x}, x_0, y_0)$ fixé et considérons un intervalle $[a, b] \subset I_{\max}(x_0, y_0)$ tel que $\bar{x}, x_0 \in (a, b)$. Nous choisissons maintenant un $\rho > 0$ suffisamment petit pour que le tuyau

$$K = \Big\{(x, y) \ ; \ x \in [a, b], \ \|y - y(x, x_0, y_0)\| \leq \rho\Big\}$$

soit entièrement inclus dans l'ouvert U. Par le Lemme 5.4 la fonction $f(x, y)$ satisfait une condition de Lipschitz (avec constante L) sur le compact K. L'ensemble



$$V = \Big\{(x_1, y_1) \ ; \ x_1 \in (a, b), \ \|y_1 - y(x_1, x_0, y_0)\| < \rho e^{-L(b-a)}\Big\}$$

est un voisinage de (x_0, y_0) qui satisfait $V \subset K \subset U$. Si $(x_1, y_1) \in V$, l'estimation du lemme fondamental garantit que $y(x, x_1, y_1)$ reste dans K pour tout $x \in [a, b]$, car

$$\begin{aligned} \|y(x,x_1,y_1) - y(x,x_0,y_0)\| &= \|y(x,x_1,y_1) - y(x,x_1,y(x_1,x_0,y_0))\| \\ &\le e^{L|x-x_1|}\,\|y_1 - y(x_1,x_0,y_0)\| < \rho. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Par conséquent, $[a, b] \subset I_{\max}(x_1, y_1)$ et $(a, b) \times V$ est un voisinage de $(\bar{x}, x_0, y_0)$ inclus dans D. Donc, D est ouvert.

Pour démontrer la continuité de y, nous observons que pour $(x_1, y_1) \in V$ et $x \in (a, b)$

$$\|y(x,x_1,y_1) - y(\bar{x},x_1,y_1)\| = \Big\| \int_{\bar{x}}^{x} f(t, y(t,x_1,y_1))\,dt \Big\| \le M\,|x - \bar{x}| \tag{5.7}$$

où M est une borne supérieure de $f(x, y)$ sur K. Comme dans (5.6) nous estimons

$$\begin{aligned} \|y(\bar{x},x_1,y_1) - y(\bar{x},x_0,y_0)\| &\le e^{L|\bar{x}-x_1|}\|y_1 - y(x_1,x_0,y_0)\| \\ &\le e^{L(b-a)}(\|y_1 - y_0\| + M\,|x_1 - x_0|). \end{aligned} \tag{5.8}$$

Les deux estimations (5.7) et (5.8) démontrent la continuité de $y : D \to \mathbb{R}^n$. □

III.6 Systèmes d'équations différentielles linéaires

Dans ce paragraphe nous considérons des équations différentielles

$$y' = A(x)y + g(x) \tag{6.1}$$

où $A(x)$ est une matrice $n \times n$ et $g(x)$ est un vecteur. On dit que cette équation différentielle est *homogène* si $g(x) \equiv 0$, sinon elle est *inhomogène*.

Théorème 6.1 (existence globale et unicité) *Soit I un intervalle (arbitraire) et supposons que $A(x)$ et $g(x)$ soient des fonctions continues sur I. Alors, le problème $y' = A(x)y + g(x)$, $y(x_0) = y_0$ (avec $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$) possède une solution unique sur tout l'intervalle I.*

Démonstration. La fonction $f(x, y) = A(x)y + g(x)$ est continue sur $I \times \mathbb{R}^n$ et satisfait localement une condition de Lipschitz. La solution est donc unique là où elle existe. Pour démontrer l'existence globale, nous montrons que la solution $y(x)$ ne peut pas tendre vers ∞ pour $x \to a$ si a est un point à l'intérieur de I (Théorème 4.3). En effet, sur l'intervalle compact $[x_0, a]$, les fonctions $A(x)$ et $g(x)$ sont bornées ($\|A(x)\| \le L$ et $\|g(x)\| \le \delta$ sur $[x_0, a]$). Le lemme fondamental (Théorème 5.3) avec $v(x) \equiv 0$ donne alors l'estimation

$$\|y(x)\| \le \|y_0\|\, e^{L(a-x_0)} + \frac{\delta}{L}\Big(e^{L(a-x_0)} - 1\Big)$$

pour tout $x \in [x_0, a]$. □

Théorème 6.2 (principe de superposition) *Soit I un intervalle et soient $A(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ des fonctions continues sur I. Si*

$$\begin{aligned} &y_1 : I \to \mathbb{R}^n \quad \textit{est solution de} \quad y' = A(x)y + g_1(x), \\ &y_2 : I \to \mathbb{R}^n \quad \textit{est solution de} \quad y' = A(x)y + g_2(x), \end{aligned}$$

alors $y(x) := c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ *est solution de*

$$y' = A(x)y + g(x) \qquad \textit{avec} \qquad g(x) := c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x).$$

Démonstration. Ceci est un exercice très simple. □

Alors que la démonstration de ce résultat est très simple, il a des conséquences très importantes:

- les solutions de $y' = A(x)y$ forment un espace vectoriel;
- les solutions de $y' = A(x)y$ dépendent linéairement de y_0, c.-à-d.,

$$y(x, x_0, c_1 y_0 + c_2 z_0) = c_1 y(x, x_0, y_0) + c_2 y(x, x_0, z_0).$$

  La solution de $y' = A(x)y$, $y(x_0) = y_0$ peut donc être écrite sous la forme

$$y(x, x_0, y_0) = R(x, x_0) y_0, \tag{6.2}$$

  et la matrice $R(x, x_0)$ s'appelle la *résolvante* de l'équation différentielle $y' = A(x)y$. La $i$ème colonne de la matrice $R(x, x_0)$ est solution de $y' = A(x)y$ avec pour valeur initiale $y(x_0) = e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots 0)^T$;
- si $\Phi(x)$ est une *matrice fondamentale* (aussi appelé *wronskienne*), c.-à-d., les colonnes de $\Phi(x)$ sont des solutions de $y' = A(x)y$ et $\Phi(x_0)$ est inversible, alors

$$R(x, x_0) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}. \tag{6.3}$$

  En effet, $y(x) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1} y_0$ est solution de $y' = A(x)y, y(x_0) = y_0$.

Théorème 6.3 (propriétés de la résolvante) *Soit $A(x)$ continue sur un intervalle. Alors, la résolvante de $y' = A(x)y$ satisfait*

$$\begin{array}{rl}
\text{i)} & R'(x, x_0) = A(x) R(x, x_0) \qquad \textit{(dérivée par rapport à } x) \\
\text{ii)} & R(x_0, x_0) = I \qquad \textit{(matrice identité)} \\
\text{iii)} & R(x, x_0) = R(x, x_1) R(x_1, x_0) \\
\text{iv)} & R(x, x_0) \quad \textit{est inversible et} \quad R(x, x_0)^{-1} = R(x_0, x).
\end{array}$$

Démonstration. Par (6.2) on a que $R'(x, x_0) y_0 = A(x) R(x, x_0) y_0$ et $R(x_0, x_0) y_0 = y_0$ pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Ceci démontre les propriétés (i) et (ii). La propriété (iii) est une conséquence de (5.4) et (iv) suit de (iii) en posant $x = x_0$. □

Exemple 6.4 L'équation différentielle $y'' + y = 0$ peut être écrite sous la forme (en posant $y_1 = y$ et $y_2 = y'$)

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

et possède comme résolvante

$$R(x, x_0) = \begin{pmatrix} \cos(x - x_0) & \sin(x - x_0) \\ -\sin(x - x_0) & \cos(x - x_0) \end{pmatrix}.$$

Il est intéressant que la propriété (iii) du théorème précédent, c.-à-d.,

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}$$

avec $\alpha = x - x_1$, $\beta = x_1 - x_0$ et $\alpha + \beta = x - x_0$, est équivalente au théorème d'addition pour $\sin x$ et $\cos x$.

Théorème 6.5 (Liouville) *Soit $A(x)$ continue sur un intervalle et soit $\Phi(x)$ une matrice fondamentale de $y' = A(x)y$. Alors,*

$$\det \Phi(x) = \det \Phi(x_0) \cdot \exp\Big(\int_{x_0}^{x} \operatorname{trace} A(t)\, dt \Big)$$

où $\operatorname{trace} A(x) = a_{11}(x) + a_{22}(x) + \ldots + a_{nn}(x)$.

Démonstration. Soit $\Phi(x) = (\Phi_{ij}(x))_{i,j=1}^{n}$. Comme $\det \Phi(x)$ est une forme multilinéaire par rapport aux lignes de $\Phi(x)$, on a que

$$\frac{d}{dx}\Big(\det \Phi(x)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \det D_i(x) \qquad \text{où} \qquad D_i(x) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \ldots & \Phi_{1n}(x) \\ \Phi'_{i1}(x) & \ldots & \Phi'_{in}(x) \\ \Phi_{n1}(x) & \ldots & \Phi_{nn}(x) \end{pmatrix}.$$

La matrice $D_i(x)$ est obtenue de $\Phi(x)$ en remplaçant la $i$ème ligne de $\Phi(x)$ par sa dérivée. En utilisant l'équation différentielle $\Phi'(x) = A(x)\Phi(x)$, c.-à-d., $\Phi'_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x)\Phi_{kj}(x)$, et la multilinéarité du déterminant, on obtient que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Big(\det \Phi(x)\Big) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}(x) \det \begin{pmatrix} \Phi_{11}(x) & \ldots & \Phi_{1n}(x) \\ \Phi_{k1}(x) & \ldots & \Phi_{kn}(x) \\ \Phi_{n1}(x) & \ldots & \Phi_{nn}(x) \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{ ligne } i \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \det \Phi(x). \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre cette équation différentielle pour $\det \Phi(x)$. □

Le théorème de Liouville possède une interprétation intéressante. Si $V = (v_1, \ldots, v_n)$ est une matrice dont les colonnes sont les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$, la valeur de $\det V$ représente la volume du parallélépipède engendré par $v_1, \ldots, v_n$. Considérons maintenant le *flot* de l'équation différentielle $y' = A(x)y$, c.-à-d., l'application $\varphi_{x,x_0} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie par $\varphi_{x,x_0}(y_0) = R(x, x_0)y_0$. Si $\operatorname{trace} A(x) \equiv 0$, on déduit du théorème de Liouville que le volume d'un sous-ensemble B de $\mathbb{R}^n$ est invariant par l'application φ_{x,x_0}, c.-à-d., B et $\varphi_{x,x_0}(B)$ possèdent le même volume. Pour l'équation différentielle de l'Exemple 6.4, la préservation du volume est évidente, car l'application φ_{x,x_0} n'est rien d'autre qu'une rotation par l'angle $x - x_0$.

Equations linéaires inhomogènes Considérons maintenant l'équation différentielle (6.1) où $g(x)$ n'est pas nulle. Si l'on connait la résolvante de l'équation homogène, on trouve la solution du problème inhomogène par la méthode des variations des constantes.

Théorème 6.6 ("variation des constantes") *Soient $A(x)$ et $g(x)$ continues sur un intervalle et soit $R(x, x_0)$ la résolvante de $y' = A(x)y$. Alors, la solution de $y' = A(x)y + g(x)$, $y(x_0) = y_0$ est donnée par*

$$y(x) = R(x, x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} R(x, t)g(t)\, dt.$$

Démonstration. La solution générale de l'équation homogène est $R(x, x_0)c$ avec $c \in \mathbb{R}^n$. L'idée (d'où le nom "variation des constantes") est de chercher une solution de $y' = A(x)y + g(x)$ sous la forme $y(x) = R(x, x_0)c(x)$. Il faut alors que

$$y'(x) = R'(x, x_0)c(x) + R(x, x_0)c'(x) = A(x)R(x, x_0)c(x) + g(x).$$

En utilisant la propriété (i) du Théorème 6.3, nous obtenons

$$c'(x) = R(x, x_0)^{-1} g(x) = R(x_0, x) g(x)$$

et par intégration $c(x) = c(x_0) + \int_{x_0}^{x} R(x_0, t) g(t)\, dt$. L'affirmation du théorème découle alors en insérant cette formule pour $c(x)$ dans $y(x) = R(x, x_0) c(x)$. $\square$

Ce résultat montre que, comme dans le cas particulier de dimension 1, la solution générale de $y' = A(x)y + g(x)$ est composée de la solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation inhomogène. Il reste alors à discuter le calcul de la résolvante $R(x, x_0)$. Pour le cas $A(x) = A$ (matrice constante), ceci est le sujet du paragraphe suivant. Si $A(x)$ dépend de x, le calcul analytique de la résolvante est rarement possible.

III.7 Systèmes linéaires à coefficients constants

Considérons le problème de calculer la résolvante de

$$y' = Ay \tag{7.1}$$

où A est une matrice constante d'ordre n (les a_{ij} sont réels ou complexes). Motivés par la résolution de problèmes scalaires, essayons de trouver des solutions de la forme

$$y(x) = e^{\lambda x} v \qquad \text{avec un vecteur } \; v \neq 0\,. \tag{7.2}$$

En insérant (7.2) dans (7.1) nous obtenons $y'(x) = \lambda e^{\lambda x} v = e^{\lambda x} Av$, ce qui est équivalent à $Av = \lambda v$. La fonction de (7.2) est alors une solution de (7.1) si et seulement si λ est une valeur propre de A et v est un vecteur propre correspondant.

Cas 1 (A est diagonalisable) Dans cette situation, il existe n vecteurs propres indépendants $v_1, \ldots, v_n$ avec valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Considérons la matrice

$$\Phi(x) = \Big(e^{\lambda_1 x} v_1, \ldots, e^{\lambda_n x} v_n \Big). \tag{7.3}$$

Par le Théorème 6.5 de Liouville, $\Phi(x)$ est inversible pour tout x car $\Phi(0)$ l'est. La résolvante est alors donnée par $R(x, x_0) = \Phi(x)\Phi(x_0)^{-1}$ (voir l'équation (6.3)) ou aussi par $R(x, x_0) = \Phi(x - x_0)\Phi(0)^{-1}$.

Cas 2 (A n'est pas diagonalisable) L'idée est de transformer A sous une forme "plus simple", par exemple sous forme triangulaire ou sous forme de Jordan. On cherche alors une matrice inversible T telle que $T^{-1}AT = S$ possède une telle forme. Avec la transformation $y = Tz$ (et $y' = Tz'$) le système (7.1) devient $z' = Sz$. Pour le cas d'une matrice triangulaire on a

$$\begin{array}{rcccccccc}
z_1' & = & s_{11} z_1 & + & s_{12} z_2 & + & \ldots & + & s_{1n} z_n \\
z_2' & = & & & s_{22} z_2 & + & \ldots & + & s_{2n} z_n \\
 & & & & & & \ldots & & \\
z_n' & = & & & & & & & s_{nn} z_n
\end{array}$$

On résoud d'abord l'équation différentielle pour z_n, ensuite celle pour z_{n-1} et à la fin celle pour z_1. La solution de (7.1) est obtenue par $y(x) = Tz(x)$.

Exemple 7.1 Considérons un bloc de Jordan de dimension 4

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Pour la solution de $z' = Jz$ on commence par z_4; on trouve $z_4' = \lambda z_4$ et $z_4(x) = e^{\lambda x} c_4$. L'équation différentielle pour z_3 est $z_3' = \lambda z_3 + e^{\lambda x} c_4$. Sa solution est $z_3(x) = e^{\lambda x} c_3 + x e^{\lambda x} c_4$. De la même façon on calcule $z_2(x)$ et $z_1(x)$. Le résultat est

$$z(x) = e^{\lambda x} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2/2! & x^3/3! \\ & 1 & x & x^2/2! \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{pmatrix} z(0). \tag{7.4}$$

On trouve la solution (7.4) de $z' = Jz$ aussi à l'aide du théorème suivant.

Théorème 7.2 *La résolvante de $y' = Ay$ est donnée par*

$$R(x, x_0) = \exp\Big(A(x - x_0)\Big) := \sum_{i \geq 0} \frac{(x - x_0)^i}{i!} A^i. \tag{7.5}$$

Démonstration. Comme $\|A^i\| \leq \|A\|^i$, la série $\sum_{i \geq 0} \frac{\alpha^i}{i!} \|A\|^i = \exp(\alpha \|A\|)$ est une majorante de la série de (7.5) pour $|x - x_0| \leq \alpha$. Ceci montre la convergence uniforme sur chaque intervalle compact. On peut donc échanger la dérivée avec la sommation et on obtient

$$\frac{d}{dx} \exp\Big(A(x - x_0)\Big) = \frac{d}{dx} \sum_{i \geq 0} \frac{(x - x_0)^i}{i!} A^i = \sum_{i \geq 1} \frac{(x - x_0)^{i-1}}{(i-1)!} A^i = A \exp\Big(A(x - x_0)\Big).$$

Chaque colonne de $\exp(A(x - x_0))$ est une solution de $y' = Ay$ et on obtient (7.5) car $\exp(0) = I$. □

Revenons à l'Exemple 7.1. Le bloc de Jordan peut être écrit sous la forme $J = \lambda I + N$ où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \\ & 0 & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

et $N^j = 0$ pour $j \geq 4$. Par le Théorème 7.2, la résolvante est donnée par

$$R(x, 0) = \exp\Big((\lambda I + N)x\Big) = e^{\lambda x} \exp\Big(Nx\Big) = e^{\lambda x} \sum_{i \geq 0} \frac{x^i}{i!} N^i.$$

Attention Pour $y' = A(x)y$ où $A(x)$ dépend de x, on a en général que

$$R(x, x_0) \neq \exp\Big(\int_{x_0}^{x} A(t)\, dt\Big) \tag{7.6}$$

(voir Exercice 30). On a l'égalité dans (7.6) seulement si la dimension est 1 ou si les matrices $A(x)$ et $\int_{x_0}^{x} A(t)\, dt$ commutent.

III.8 Différentiabilité par rapport aux valeurs initiales

Considérons la solution du problème de Cauchy

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{8.1}$$

comme fonction de trois arguments $y(x, x_0, y_0)$ et étudions la sensibilité de la solution par rapport à des perturbations dans les valeurs initiales x_0, y_0. Nous savons déjà que $y(x, x_0, y_0)$ dépend continûment de (x_0, y_0) (voir le Théorème 5.5), mais que peut-on dire sur la différentiabilité? Quelle est l'approximation du premier ordre de $y(x, x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0)$?

A) Différentiabilité par rapport à y_0. Supposons que $f : U \to \mathbb{R}^n$ (avec $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ouvert) satisfasse les hypothèses sur l'existence et l'unicité de la solution. Alors, $y(x, x_0, y_0)$ est bien définie sur l'ensemble ouvert

$$D := \Big\{(x, x_0, y_0)\ ;\ (x_0, y_0) \in U \ \text{ et } \ x \in I_{\max}(x_0, y_0)\Big\}. \tag{8.2}$$

Pour obtenir une idée de la forme de la dérivée $\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0)$, écrivons le problème (8.1) comme

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x, x_0, y_0) = f\Big(x, y(x, x_0, y_0)\Big), \qquad y(x_0, x_0, y_0) = y_0 \tag{8.3}$$

et dérivons cette équation formellement par rapport à y_0. En échangeant les dérivées par rapport à x et y_0, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0)\Big) = \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y(x, x_0, y_0)\Big) \cdot \frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0), \qquad \frac{\partial y}{\partial y_0}(x_0, x_0, y_0) = I.$$

D'après ce calcul formel, nous voyons que $\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0)$ est la solution de l'équation linéaire

$$\Psi' = \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y(x, x_0, y_0)\Big)\Psi, \qquad \Psi(x_0) = I. \tag{8.4}$$

Cette équation s'appelle *équation variationelle* de (8.1). Elle est de la forme $y' = A(x, x_0, y_0)y$ où la matrice A dépend du paramètre (x_0, y_0). La résolvante dépend donc aussi de ce paramètre. Notons-la par $R(x, s, x_0, y_0)$. Le calcul formel montre alors que

$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0) = R(x, x_0, x_0, y_0). \tag{8.5}$$

Dans la démonstration du théorème suivant, nous justifierons cette procédure.

Théorème 8.1 *Soit $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue et supposons que $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existe et soit continue sur U. La solution $y : D \to \mathbb{R}^n$ de (8.1) satisfait alors*

- *$y(x, x_0, y_0)$ est continûment différentiable par rapport à y_0;*
- *$\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0)$ est la résolvante de l'équation variationelle (8.4).*

Démonstration. Pour $(\bar{x}, x_0, y_0) \in D$ fixé, il faut démontrer que

$$y(\bar{x}, x_0, y_0 + \Delta y_0) - y(\bar{x}, x_0, y_0) - R(\bar{x}, x_0, x_0, y_0)\Delta y_0 = r(\Delta y_0)\|\Delta y_0\|$$

où $r(\Delta y_0) \to 0$ si $\Delta y_0 \to 0$. L'idée de la démonstration est de considérer

$$v(x) := y(x, x_0, y_0) + R(x, x_0, x_0, y_0)\Delta y_0$$

comme solution approchée de (8.1) et d'estimer la différence $y(x,x_0,y_0+\Delta y_0)-v(x)$ à l'aide du lemme fondamental (Théorème 5.3). Avec l'abréviation $\delta(x):=R(x,x_0,x_0,y_0)\Delta y_0$ nous avons $\|\delta(x)\|\le M\|\Delta y_0\|$ sur l'intervalle compact $[x_0,\bar{x}]$. Considérons le tuyau $K:=\{(x,y)\,;\,x\in[x_0,\bar{x}],\ \|y-y(x,x_0,y_0)\|\le\rho\}$ avec $\rho>0$ suffisamment petit pour que $K\subset U$. Pour $\|\Delta y_0\|\le\rho/M$, la fonction $v(x)$ reste dans K et son défaut est donné par

$$f\big(x,v(x)\big)-v'(x)=f\big(x,y(x,x_0,y_0)+\delta(x)\big)-f\big(x,y(x,x_0,y_0)\big)-\frac{\partial f}{\partial y}\big(x,y(x,x_0,y_0)\big)\delta(x).$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à $F(\delta):=f(x,y+\delta)-f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\delta$ (observons que $F(0)=0$) implique que

$$\Big\|f(x,y+\delta)-f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\delta\Big\|\le\sup_{\lambda\in[0,1]}\Big\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\lambda\delta)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big\|\cdot\|\delta\|.$$

Comme $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est uniformément continue sur le compact K, on a l'estimation

$$\sup_{\lambda\in[0,1]}\Big\|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y+\lambda\delta)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\Big\|\le r_1(\|\delta\|)\qquad\text{où}\quad r_1(\|\delta\|)\to 0\ \text{ si }\ \delta\to 0.$$

La fonction $r_1(\cdot)$ peut être choisie monotone et indépendente de $(x,y)\in K$. Par conséquent,

$$\|f(x,v(x))-v'(x)\|\le r_1(M\|\Delta y_0\|)M\|\Delta y_0\|.$$

Sur le compact K, $f(x,y)$ satisfait une condition de Lipschitz. On peut donc appliquer le lemme fondamental et on obtient

$$\|y(x,x_0,y_0+\Delta y_0)-v(x)\|\le\frac{r_1(M\|\Delta y_0\|)M\|\Delta y_0\|}{L}\Big(e^{L(x-x_0)}-1\Big),$$

ce qui démontre la différentiabilité de $y(x,x_0,y_0)$ par rapport à y_0 et la formule (8.5).

Il faut encore démontrer la continuité de $\frac{\partial y}{\partial y_0}(x,x_0,y_0)$. Elle est une conséquence du Lemme 8.2 (voir plus bas). On ne peut pas directement appliquer le Théorème 5.5, car l'argument (x_0,y_0) n'est pas une valeur initiale de l'équation variationelle (8.4) mais un paramètre de celle-ci. □

Lemme 8.2 *Soit $y'=A(x,c)y$ une équation différentielle linéaire qui dépend d'un paramètre c. Si $A(x,c)$ est continue sur $I\times V$ (I un intervalle ouvert et $V\subset\mathbb{R}^p$ ouvert), alors la résolvante $R(x,x_0,c)$ est une fonction continue sur $I\times I\times V$.*

Démonstration. Pour un $(\bar{x},x_0,c)$ fixé, il faut démontrer que la différence $R(x,x_1,c_1)-R(\bar{x},x_0,c)$ est arbitrairement petite si (x,x_1,c_1) est suffisamment proche de $(\bar{x},x_0,c)$. Une application du Théorème 5.5 montre que $R(x,x_1,c)-R(\bar{x},x_0,c)$ est arbitrairement petit. Il suffit alors d'estimer la différence $R(x,x_1,c_1)-R(x,x_1,c)$.

Soit $[a,b]\subset I$ tel que x_0 et $\bar{x}$ sont à l'intérieur de (a,b), soit $K\subset V$ un voisinage compact de c, et soit L une borne de $\|A(x,c)\|$ sur le compact $[a,b]\times K$. Ceci implique $\|R(t,x_1,c_1)\|\le e^{L(b-a)}$ pour $t,x_1\in[a,b]$ et $c_1\in K$ (voir la démonstration du Théorème 6.1).

La fonction $y(x):=R(x,x_1,c)y_0$ est une solution de $y'=A(x,c)y$, $y(x_1)=y_0$. La fonction $v(x):=R(x,x_1,c_1)y_0$ est une solution approchée, qui satisfait $v(x_1)=y_0$ et

$$\|v'(t)-A(t,c)v(t)\|=\|(A(t,c_1)-A(t,c))R(t,x_1,c_1)y_0\|\le\varepsilon e^{L(b-a)}\|y_0\|$$

si c_1 est proche de c. Ceci découle de la continuité uniforme de $A(t,c)$ sur $[a,b]\times K$. Le lemme fondamental donne alors l'estimation

$$\Big\|\Big(R(x,x_1,c)-R(x,x_1,c_1)\Big)y_0\Big\|\le\frac{\varepsilon e^{L(b-a)}}{L}\Big(e^{L|x-x_1|}-1\Big)\|y_0\|,$$

ce qui démontre l'affirmation. □

B) Différentiabilité par rapport aux paramètres Considérons un problème avec des paramètres $c = (c_1, \ldots, c_p)^T$

$$y' = f(x, y, c), \qquad y(x_0) = y_0$$

où $f : U \to I\!R^n$ est continue et différentiable par rapport à (y, c) (U est un ouvert de $I\!R \times I\!R^n \times I\!R^p$). La solution est une fonction $y(x, x_0, y_0, c)$. Pour étudier la différentiabilité par rapport à c, nous considérons le système augmenté

$$\begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(x,y,c) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y \\ c \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ c \end{pmatrix}. \tag{8.6}$$

Avec $z = (y, c)^T$ et $F(x, z) = (f(x, y, c), 0))^T$, ce système devient $z' = F(x, z)$, $z(x_0) = (y_0, c)^T$ et c apparaît seulement dans la valeur initiale. On peut donc appliquer le Théorème 8.1. La fonction $z(x, x_0, z_0)$ et alors aussi $y(x, x_0, y_0, c)$ sont continûment différentiables par rapport à $z_0 = (y_0, c)^T$. En dérivant l'équation

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x, x_0, y_0, c) = f\Big(x, y(x, x_0, y_0, c), c\Big)$$

par rapport à c, on obtient pour $\Psi(x) := \frac{\partial y}{\partial c}(x, x_0, y_0, c)$ l'équation différentielle

$$\Psi' = \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y(x, x_0, y_0, c), c\Big)\Psi + \frac{\partial f}{\partial c}\Big(x, y(x, x_0, y_0, c), c\Big). \tag{8.7}$$

Exemple 8.3 La solution du problème

$$y' = f(x, y) + \varepsilon g(x, y), \qquad y(x_0) = y_0$$

est, pour $|\varepsilon|$ petit, donnée par $y(x, \varepsilon) = y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots$ où

$$\begin{aligned} y_0'(x) &= f(x, y_0(x)), \qquad y_0(x_0) = y_0 \\ y_1'(x) &= \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0(x))y_1(x) + g(x, y_0(x)), \quad y_1(x_0) = 0. \end{aligned}$$

C) Différentiabilité par rapport à x_0. Supposons que $f(x, y)$ soit continûment différentiable par rapport à x et y. Nous considérons le système augmenté

$$\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}(x_0) = \begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \end{pmatrix}. \tag{8.8}$$

Avec $z = (y, x)^T$ et $F(z) = (f(x, y), 1)^T$ le système devient $z' = F(z)$, $z(x_0) = (y_0, x_0)^T$. Donc, x_0 peut être traité de la même manière que y_0. La solution $y(x, x_0, y_0)$ est alors aussi différentiable par rapport à x_0. En dérivant (8.3) par rapport à x_0, on obtient pour $\Psi(x) := \frac{\partial y}{\partial x_0}(x, x_0, y_0)$ l'équation différentielle

$$\Psi' = \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y(x, x_0, y_0)\Big)\Psi, \qquad \Psi(x_0) = -f(x_0, y_0). \tag{8.9}$$

Comme $\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0)$ est la résolvante de (8.9), on en déduit que

$$\frac{\partial y}{\partial x_0}(x, x_0, y_0) = -\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0) f(x_0, y_0). \tag{8.10}$$

Cette dernière formule peut aussi être obtenue en dérivant l'identité $y(x, x_0, y(x_0, x_1, y_1)) = y(x, x_1, y_1)$ par rapport à x_0 et en utilisant $y_0 := y(x_0, x, y_1)$. Comme résumé de ce paragraphe nous avons le résultat suivant.

Théorème 8.4 *Soit $U \subset I\!R \times I\!R^n$ un ouvert et $f : U \to I\!R^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ (de classe $\mathcal{C}^k$). Alors, la solution $y(x, x_0, y_0)$ de (8.1) est de classe $\mathcal{C}^1$ (de classe $\mathcal{C}^k$) sur D de (8.2).*

Démonstration. Toutes les dérivées partielles de $y(x, x_0, y_0)$ sont continues. Alors, $y : D \to I\!R^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En appliquant cet argument itérativement à l'équation variationelle, on voit par récurrence que y est de classe $\mathcal{C}^k$ si f est de classe $\mathcal{C}^k$. □

III.9 Stabilité

Dans le paragraphe précédent nous avons vu que, pour un x fixé, la solution $y(x, x_0, y_0)$ dépend continûment des valeurs initiales. Mais que peut-on dire pour $x \to \infty$?

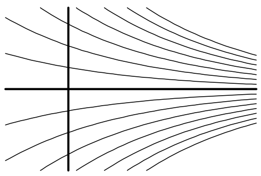
Définition 9.1 Soit $U \subset I\!R \times I\!R^n$ ouvert et supposons que $f : U \to I\!R^n$ soit continue et satisfasse localement une condition de Lipschitz. Une solution $y(x, x_0, y_0)$ de $y' = f(x, y)$ (qui existe pour tout $x \geq x_0$) est dite *stable* (au sens de Liapunov) si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall \Delta y_0 \ (\|\Delta y_0\| < \delta) \quad \forall x \ (x \geq x_0) \quad \|y(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) - y(x, x_0, y_0)\| < \varepsilon.$$

La solution est dite *asymptotiquement stable* si elle est stable et si en plus

$$\exists \delta_0 > 0 \quad \forall \Delta y_0 \ (\|\Delta y_0\| < \delta_0) \quad \lim_{x \to \infty} \|y(x, x_0, y_0 + \Delta y_0) - y(x, x_0, y_0)\| = 0.$$

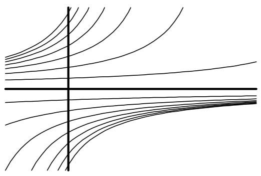
Une solution est *instable* si elle n'est pas stable.



Exemple 9.2 La solution $y(x) \equiv 0$ de l'équation différentielle

$$y' = \lambda y$$

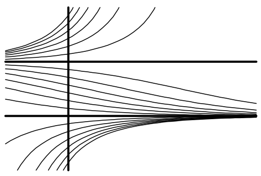
est asymptotiquement stable pour $\lambda < 0$ (voir le dessin ci-contre), stable pour $\lambda \leq 0$ et instable pour $\lambda > 0$.



Exemple 9.3 La solution $y(x, 0, y_0) = y_0/(1 - y_0 x)$ de l'équation différentielle

$$y' = y^2$$

est asymptotiquement stable pour $y_0 < 0$, mais instable pour $y_0 = 0$.



Exemple 9.4 Pour l'équation différentielle

$$y' = y(y - 1)$$

la solution $y(x) \equiv 0$ est asymptotiquement stable, mais la solution $y(x) \equiv 1$ est instable.

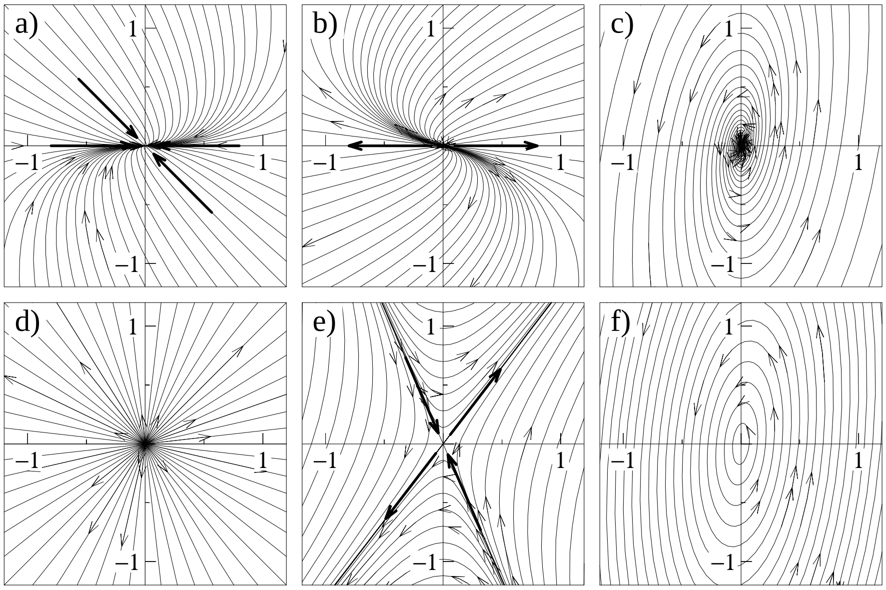
Pour étudier la stabilité d'une solution $y(x)$ de $y' = f(x, y)$, il est souvent avantageux d'appliquer la transformation $z = y - y(x)$. Ainsi, l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ se transforme en

$$z' = g(x, z), \qquad g(x, z) = f(x, z + y(x)) - f(x, y(x)) \tag{9.1}$$

avec $z(x) \equiv 0$ comme solution.

Lemme 9.5 *Sous les hypothèses de la Définition 9.1, la solution $y(x)$ de $y' = f(x, y)$ est stable, si et seulement si $z(x) \equiv 0$ est une solution stable de (9.1). Dans cette affirmation, on peut remplacer 'stable' par 'asymptotiquement stable' ou par 'instable'.*

Démonstration. L'affirmation est une conséquence immédiate du fait que $z(x, x_0, z_0) = y(x, x_0, y_0) - y(x)$ avec pour $z_0 = y_0 - y(x_0)$. □



a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \\ 2 & -1/6 \end{pmatrix}$

FIG. 9.1 – *Solutions de systèmes linéaires en dimension* 2

Par conséquent, on peut toujours se ramener au cas où $f(x,0) \equiv 0$ et où on est intéressé par la stabilité de la solution nulle $y(x) \equiv 0$. Un désavantage potentiel de la transformation (9.1) est qu'un système autonome $y' = f(y)$ peut devenir non-autonome.

Pour une équation linéaire $y' = A(x)y + g(x)$ la transformation (9.1) donne $z' = A(x)z$ et on obtient: une solution arbitraire de $y' = A(x)y + g(x)$ est stable (asymptotiquement stable ou instable) si la solution nulle de l'équation homogène $y' = A(x)y$ est stable (asymptotiquement stable ou instable). Pour une équation linéaire, toutes les solutions possèdent le même comportement de stabilité. Dans cette situation, on parle aussi de la stabilité de l'équation différentielle et non de la solution.

Théorème 9.6 *a) L'équation différentiélle $y' = Ay$ est asymptotiquement stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A satisfont $\Re\lambda_i < 0$.*

b) Elle est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de A satisfont $\Re\lambda_i \leq 0$ et, pour les valeurs propres avec $\Re\lambda_i = 0$, les blocs de Jordan sont de dimension 1.

Démonstration. On transforme la matrice A sous forme de Jordan et on utilise la représentation explicite de la solution (Exemple 7.1). L'affirmation est une conséquence du fait que $|e^{\lambda x}|$ reste borné pour $x \geq x_0$ si $\Re\lambda \leq 0$, et que $x^k e^{\lambda x} \to 0$ pour $x \to \infty$ si $\Re\lambda < 0$. □

Le comportement des solutions de $y' = Ay$ (pour des matrices de dimension 2) est illustré dans la Fig. 9.1. Pour le dessin (c) les valeurs propres sont complexes conjugées avec $\Re\lambda_i > 0$, pour (e) les valeurs propres possèdent un signe opposé et pour (f) les deux valeurs propres sont sur l'axe imaginaire. Dans les dessins (a), (b) et (e) les directions des vecteurs propres sont indiquées par des fleches.

Le critère de stabilité du Théorème 9.6 ne reste pas vrai pour des équations différentielles non-autonomes $y' = A(x)y$.

Exemple 9.7 Considérons l'équation différentielle

$$y' = A(x)y, \qquad A(x) = T(x)^{-1}BT(x), \tag{9.2}$$

où

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T(x) = \begin{pmatrix} \cos(ax) & -\sin(ax) \\ \sin(ax) & \cos(ax) \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de $A(x)$ sont réelles et négatives (égales à -1). Nous allons déterminer le paramètre a dans la matrice de rotation $T(x)$ afin que (9.2) devienne instable. Avec la transformation $z(x) := T(x)y(x)$ nous obtenons

$$z'(x) = T'(x)y(x) + T(x)A(x)y(x) = \left(\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right) z(x),$$

une équation linéaire à coefficients constants. Pour $a = -2$, la matrice de l'équation différentielle pour $z(x)$ possède $\lambda^2 + 2\lambda - 3$ comme polynôme caractéristique. Donc, $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre avec $(1,1)^T$ comme vecteur propre. Une solution non-bornée de (9.2) est alors donnée par

$$y(x) = e^x \begin{pmatrix} \cos 2x + \sin 2x \\ -\sin 2x + \cos 2x \end{pmatrix}.$$

L'équation différentielle (9.2) est instable, tandis que toutes les valeurs propres de $A(x)$ possèdent une partie réelle négative.

Théorème 9.8 *Soit $A(x)$ une matrice symétrique et continue sur $[a,\infty)$. Si les valeurs propres $\lambda_i(x)$ de $A(x)$ satisfont*

$$\lambda_i(x) \le \alpha \qquad \textit{pour} \;\; i = 1,\ldots,n \;\; \textit{et pour} \;\; x \in [a,\infty),$$

alors on a l'estimation

$$\|y(x)\|_2 \le e^{\alpha(x-x_0)}\, \|y(x_0)\|_2 \qquad \textit{pour} \;\; x \ge x_0$$

pour les solutions de $y' = A(x)y$. Le système $y' = A(x)y$ est donc stable si $\alpha \le 0$ et asymptotiquement stable si $\alpha < 0$.

Démonstration. Montrons d'abord que les hypothèses sur $A(x)$ impliquent

$$v^T A(x) v \le \alpha v^T v \qquad \text{pour} \;\; v \in I\!R^n.$$

Comme $A(x)$ est symétrique, elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale $Q(x)$, c.-à-d., $Q(x)^T A(x) Q(x) = \Lambda(x) = \mathrm{diag}(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_n(x))$. Avec $v = Q(x)w$ on a alors que $v^T A(x) v = w^T \Lambda(x) w \le \alpha w^T w = \alpha v^T v$.

Pour une solution $y(x)$ de $y' = A(x)y$, considérons la fonction $m(x) := \|y(x)\|_2^2$. Sa dérivée satisfait

$$m'(x) = 2\,y(x)^T y'(x) = 2\,y(x)^T A(x) y(x) \le 2\alpha\, y(x)^T y(x) = 2\alpha\, m(x).$$

En vue d'une application du Théorème 5.2, nous comparons $m(x)$ avec la solution de $u' = 2\alpha u$, $u(x_0) = m(x_0)$ (plus précisément avec la solution de $u' = 2\alpha\, u + \varepsilon$ où $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit) et nous obtenons $m(x) \le m(x_0) e^{2\alpha(x-x_0)}$ pour $x \ge x_0$. En prenant la racine carrée, nous arrivons au résultat désiré. $\square$

Considérons un problème nonlinéaire $y' = f(x,y)$ satisfaisant $f(x,0) = 0$ (voir la remarque après le Lemme 9.5). Une linéarisation autour de $y = 0$ donne

$$y' = A(x)y + g(x,y), \tag{9.3}$$

où $g(x,y)$ est une petite perturbation nonlinéaire.

Théorème 9.9 *Soit $A(x)$ continue sur (a,∞), $g : (a,\infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne où U est un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que*

- *la résolvante de $y' = A(x)y$ satisfasse $\|R(x,x_0)\| \le Ke^{-\alpha(x-x_0)}$ pour $x \ge x_0$ avec un $\alpha > 0$,*
- $\displaystyle\sup_{x>a} \frac{\|g(x,y)\|}{\|y\|} \to 0$ *si* $y \to 0$ *(uniformément en x),*

alors la solution nulle de (9.3) est asymptotiquement stable.

Démonstration. Les solutions de (9.3) satisfont

$$y(x) = R(x,x_0)y_0 + \int_{x_0}^{x} R(x,t)g(t,y(t))\,dt \tag{9.4}$$

(ceci se voit directement par différentiation de (9.4)). On en déduit l'estimation

$$\|y(x)\| \le Ke^{-\alpha(x-x_0)}\|y_0\| + \int_{x_0}^{x} Ke^{-\alpha(x-t)}\|g(t,y(t))\|\,dt.$$

Pour $\gamma := \alpha/(2K)$ il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\|g(x,y)\| \le \gamma\|y\|$ pour $\|y\| \le \varepsilon$ et pour tout $x > a$. Tant que la solution $y(x)$ reste dans $\{y\,;\,\|y\| \le \varepsilon\}$, on a

$$\|y(x)\| \le Ke^{-\alpha(x-x_0)}\|y_0\| + K\gamma\int_{x_0}^{x} e^{-\alpha(x-t)}\|y(t)\|\,dt. \tag{9.5}$$

En notant l'expression de droite par $z(x)$ et en dérivant, on obtient

$$z'(x) = -\alpha\, z(x) + K\gamma\,\|y(x)\| \le -\frac{\alpha}{2}\, z(x), \qquad z(x_0) = K\|y_0\|,$$

car $\|y(x)\| \le z(x)$. En résolvant cette inégalité différentielle, on obtient

$$\|y(x)\| \le z(x) \le K\|y_0\|e^{-\alpha(x-x_0)/2}. \tag{9.6}$$

Posons $\delta := \varepsilon/K$. Pour y_0 satisfaisant $\|y_0\| \le \delta$, l'estimation (9.6) montre que $y(x)$ reste dans $\{y\,;\,\|y\| \le \varepsilon\}$ pour tout $x \ge x_0$ et que $y(x) \to 0$ pour $x \to \infty$. La solution nulle de (9.3) est donc asymptotiquement stable. □

Théorème 9.10 *Soit A une matrice constante, et soit $g : (a,\infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ continue et localement Lipschitzienne (U un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{R}^n$). Supposons que*

- *au moins une valeur propre de A satisfait $\Re\lambda > 0$,*
- $\displaystyle\sup_{x>a} \frac{\|g(x,y)\|}{\|y\|} \to 0$ *si* $y \to 0$ *(uniformément en x),*

alors la solution nulle de $y' = Ay + g(x,y)$ *est instable.*

Démonstration. a) Supposons pour le moment que A soit diagonalisable, $T^{-1}AT = \Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, et que les valeurs propres de A soient ordonnées comme

$$\Re\lambda_1 \geq \ldots \geq \Re\lambda_s > 0 \geq \Re\lambda_{s+1} \geq \ldots \geq \Re\lambda_n.$$

Après le changement de coordonnées $y = Tz$, l'équation différentielle devient

$$z' = \Lambda z + \widehat{g}(x,z), \qquad \widehat{g}(x,z) = T^{-1}g(x,Tz). \tag{9.7}$$

L'estimation

$$\frac{\|\widehat{g}(x,z)\|}{\|z\|} = \frac{\|Tz\|}{\|z\|} \cdot \frac{\|T^{-1}g(x,Tz)\|}{\|Tz\|} \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \cdot \frac{\|g(x,Tz)\|}{\|Tz\|}$$

et l'hypothèse sur g impliquent que $\sup_{x>a} \|\widehat{g}(x,z)\|/\|z\| \to 0$ si $z \to 0$. Pour $c := \Re\lambda_s > 0$, il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que

$$\|\widehat{g}(x,z)\| \leq \frac{c}{2}\|z\| \qquad \text{pour} \qquad \|z\| \leq \varepsilon. \tag{9.8}$$

b) On cherche à démontrer que la solution nulle de $y' = Ay + g(x,y)$ est instable. Supposons, par l'absurde, qu'elle soit stable. Ceci implique que la solution $z(x) \equiv 0$ de (9.7) est aussi stable et que, par conséquence, il existe un $\delta > 0$ tel que

$$\|z_0\| \leq \delta \qquad \Longrightarrow \qquad \|z(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{pour} \quad x \geq x_0.$$

Nous écrivons maintenant le vecteur z comme $z = (u,v)^T$ où $u \in \mathbb{C}^s$ correspond aux valeurs propres avec partie réelle positive, et $v \in \mathbb{C}^{n-s}$. Nous choisissons une valeur initiale $z_0 = (u_0, v_0)^T$ satisfaisant $\|z_0\| \leq \delta$ et $\|u_0\| > \|v_0\|$. Pour la solution $z(x) = (u(x), v(x))^T$ nous considérons alors l'expression

$$d(x) = \frac{1}{2}\Big(\|u(x)\|^2 - \|v(x)\|^2\Big),$$

dont la dérivée satisfait

$$\begin{aligned} d'(x) &= \Re\langle u'(x), u(x)\rangle - \Re\langle v'(x), v(x)\rangle \\ &= \overline{u(x)}^T \Lambda_1 u(x) + \Re\langle \widehat{g}_1(x,z(x)), u(x)\rangle - \overline{v(x)}^T \Lambda_2 v(x) - \Re\langle \widehat{g}_2(x,z(x)), v(x)\rangle, \end{aligned}$$

où $\Lambda_1 = \mathrm{diag}(\Re\lambda_1, \ldots, \Re\lambda_s)$, $\Lambda_2 = \mathrm{diag}(\Re\lambda_{s+1}, \ldots, \Re\lambda_n)$ et $\widehat{g}(x,z) = (\widehat{g}_1(x,z), \widehat{g}_2(x,z))^T$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'estimation (9.8) impliquent que

$$d'(x) \geq c\,\|u(x)\|^2 - \frac{c}{2}\Big(\|u(x)\|^2 + \|v(x)\|^2\Big) = c\,d(x).$$

En résolvant cette inégalité différentielle pour $d(x)$ et en utilisant $d(x_0) > 0$, nous obtenons

$$d(x) \geq d(x_0)\, e^{c(x-x_0)}.$$

Par conséquent, $d(x) \to \infty$ pour $x \to \infty$, ce qui contredit l'hypothèse que $z(x) \equiv 0$ est une solution stable de (9.7).

c) Dans la situation où A n'est pas diagonalisable, nous transformons A sous forme de Jordan, et nous faisons une transformation additionelle avec $D = \mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots)$ pour rendre les éléments hors-diagonaux aussi petits qu'on veut. Finalement, nous ajoutons ces termes à la fonction $g(x,y)$ et nous procédons comme sous (a) et (b). □

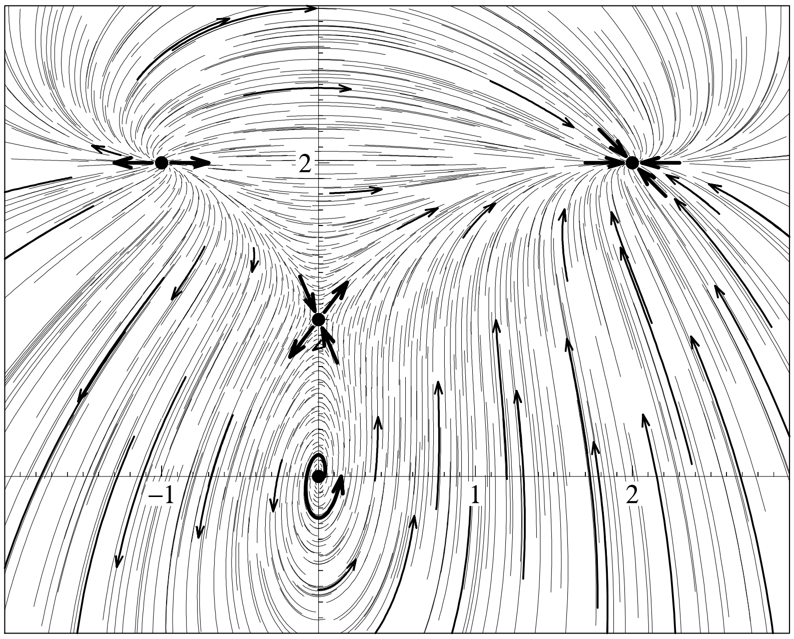


FIG. 9.2 – *Solutions d'un système nonlinéaire avec 4 points critiques*

Corollaire 9.11 *Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continûment différentiable, et soit $y_0 \in U$ un point stationnaire, c.-à-d., $f(y_0) = 0$.*

(a) *Si toutes les valeurs propres de $f'(y_0)$ satisfont $\Re\lambda < 0$, alors la solution stationnaire $y(x) \equiv y_0$ est asymptotiquement stable (on dit que y_0 est un attracteur).*

(b) *Si au moins une valeur propre de $f'(y_0)$ satisfait $\Re\lambda > 0$, alors la solution stationnaire est instable.*

(c) *Si les valeurs propres de $f'(y_0)$ satisfont $\Re\lambda \le 0$, mais au moins une valeur propre satisfait $\Re\lambda = 0$, on ne peut rien dire. La solution stationnaire peut être stable ou bien instable.*

Démonstration. La transformation $z = y - y_0$ donne $z' = f(z + y_0) = f'(y_0)z + g(z)$ où $\|g(z)\|/\|z\| \to 0$ si $z \to 0$. Les affirmations (a) et (b) sont alors une conséquence du Théorème 9.9 et du Théorème 9.10.

Pour les problèmes $y' = y^2$ et $y' = y^3$, on a $f'(0) = 0$ et la solution nulle est instable pour $y' = y^2$ (Exemple 9.3), mais asymptotiquement stable pour $y' = y^3$. Ceci se voit à partir de la forme analytique des solutions. □

Exemple 9.12 Le système

$$\begin{aligned} y_1' &= (y_1 - y_2)(1 - y_1 - y_2)/3 \\ y_2' &= y_1(2 - y_2) \end{aligned} \tag{9.9}$$

possède 4 points critiques (c.-à-d., des points où $f(y) = 0$, notamment $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,2)$ et $(-1,2)$). Seulement le point $(2,2)$ est asymptotiquement stable (voir Fig. 9.2).

III.10 Exercices

1. Déterminer le type des équations différentielles suivantes parmi (I) séparation des variables, (II) linéaire homogène, (III) lináire inhomogǹe, (IV) Bernoulli et (V) substitution de variable, sans les résoudre. Si une équation est de type (V), donner la substitution. *Attention*, il peut y avoir plusieurs solutions pour une équation.

	I	II	III	IV	V
1. $u'\cos(u) = t$	☐	☐	☐	☐	☐
2. $u' + u = u^3$	☐	☐	☐	☐	☐
3. $u' = 2 + u/t$	☐	☐	☐	☐	☐
4. $u' + u = e^{2t}$	☐	☐	☐	☐	☐
5. $tu' = u + \sqrt{t^2 + u^2}$	☐	☐	☐	☐	☐
6. $u' + u/t + t^3u^4 = 0$	☐	☐	☐	☐	☐
7. $t^2u' - u^2 = 1$	☐	☐	☐	☐	☐
8. $u' - 13u - 4ut = 2u^2 + 2t^2 + 5 + 13t$	☐	☐	☐	☐	☐
9. $(1 - t^2)u' - 2tu = t^2$	☐	☐	☐	☐	☐
10. $2tu' + u + 3t^2u^2 = 0$	☐	☐	☐	☐	☐
11. $(t\cos(t))u' + (\cos(t) + t\sin(t))u = 1$	☐	☐	☐	☐	☐
12. $-1/u^2 + 1/u - 2 = 0$	☐	☐	☐	☐	☐
13. $u' = u - 2u^2$	☐	☐	☐	☐	☐
14. $u + u/t - tc\log t = 2(c\log(t^{1/2})u^2 + tuc\log(t))$	☐	☐	☐	☐	☐
15. $u + u'(t - u) = 0$	☐	☐	☐	☐	☐
16. $u' = u - 1/u$	☐	☐	☐	☐	☐

2. Déterminer le type des équations différentielles suivantes et les résoudre:
$$(x+1)y' = -xy\ , \qquad x^2y' + xy + \sqrt{|y|} = 0\ ,$$
$$xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y\ , \qquad (x+y-2) + (x-y+4)y' = 0\ .$$
Indication. Pour la dernière équation, chercher une fonction $U(x,y)$ telle que $\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = x + y - 2$ et $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = x - y + 4$.

3. Trouver la solution de
$$y' - 2xy = \cos x - 2x\sin x$$
qui est bornée pour $x \to \infty$.

4. Considérons l'équation de Clairaut
$$y - xy' + f(y') = 0\ .$$
Montrer que l'enveloppe de la famille de solutions $y = Cx - f(C)$ est donnée par
$$x(t) = f'(t), \qquad y(t) = tf'(t) - f(t)\ .$$
Montrer également que cette enveloppe est solution de l'éqution de Clairaut (dans un voisinage de $x(t)$ où $x'(t) \neq 0$).
Pour $f(t) = 5(t^3 - t)/2$, exprimer l'enveloppe sous la forme $y(x)$ (voir Fig. 1.1).

5. Un chien court à une vitesse w en direction de sa maîtresse, qui se promène à une vitesse v (sur l'axe y). Montrer que ceci conduit à l'équation différentielle
$$xy'' = \lambda\sqrt{1 + y'^2}, \quad \lambda = v/w < 1\ ,$$
et la résoudre.

6. Appliquer l'itération de Picard-Lindelöf à
$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}} + y^2\ , \quad y(0) = 0\ .$$

7. Appliquer l'itération de Picard-Lindelöf au problème
$$y_1' = y_1 + 2y_2\ , \qquad y_1(0) = 0$$
$$y_2' = x^2 - y_1\ , \qquad y_2(0) = 0$$
et calculer les 5 premiers termes de la série de Taylor de la solution.

8. On suppose que $f(x,y)$ est continue et satisfait une condition de Lipschitz sur la bande infinie $D = \{(x,y)\,;\, a \le x \le b\}$. Montrer que le problème $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ avec $x_0 \in [a,b]$ possède une solution unique sur tout l'intervalle $[a,b]$.
   Indication. Suivre la démonstration du Théorème 2.3.

9. Sous les hypothèses de l'exercice précédent, on considère l'opérateur $T : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ donné par

$$(Ty)(x) \;=\; y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \ .$$

   (a) Montrer que, pour la norme $\|y\|_\infty = \max\{|y(x)|\,;\, x \in [a,b]\}$, l'opérateur T n'est pas toujours une contraction.
   (b) Trouver $\gamma \in I\!R$ tel que T soit une contraction pour la norme

$$\|y\| = \max\{|y(x)|e^{-\gamma|x-x_0|}\,;\, x \in [a,b]\} \ .$$

10. Considérons le problème $y' = f(x,y)$, $y(0) = 0$, où $f : I\!R^2 \to I\!R$ est donnée par

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \le 0, \quad y \in I\!R \\ 2x & \text{si} \quad x > 0, \quad y \le 0 \\ 2x - \frac{4y}{x} & \text{si} \quad x > 0, \quad 0 < y < x^2 \\ -2x & \text{si} \quad x > 0, \quad x^2 \le y. \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue. Que signifie ceci pour le problème?
   (b) Montrer que la fonction f ne satisfait une condition de Lipschitz dans aucun voisinage de l'origine.
   (c) Appliquer l'itération de Picard-Lindelöf avec $y_0(x) \equiv 0$. Les points d'accumulation de $\{y_k(x)\}$ sont-ils des solutions?
   (d) Montrer que le problème possède une unique solution. Laquelle?

11. Soit $f : I\!R^2 \to I\!R$ de classe $\mathcal{C}^1$ et soit l'équation différentielle

$$y'' \;=\; f(y, y') \ .$$

   Si $f(0,0) = 0$, montrer que toute solution non nulle de cette équation n'a que des zéros simples. Exemples: $y'' + y = 0$, $y'' + \sin y = 0$.

12. Calculer l'intervalle maximal d'existence, $I_{\max}(x_0, y_0)$, pour une solution unique de

$$y' \;=\; 1 - y^2 \qquad \text{et} \qquad y' \;=\; y^2 \ .$$

   Pour le premier problème, trouver la réponse sans calculer explicitement la solution.

13. Soit $y' = f(y)$ une équation autonome, où $f : I\!R^n \to I\!R^n$ satisfait localement une condition de Lipschitz. Montrer que si pour une solution $y : I \to I\!R^n$, il existe $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \ne t_2$ avec $y(t_1) = y(t_2)$, alors $I_{\max} = I\!R$ et la solution est soit constante soit périodique.

14. Montrer l'affirmation suivante: Si le problème $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, où $f(x,y)$ est une fonction continue, possède une solution unique, alors les polygones d'Euler convergent vers cette solution.

15. On considère le problème $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = 0$, où

$$f(x,y) \;=\; \begin{cases} 4\,\mathrm{sign}(y)\sqrt{|y|} & \text{si} \quad |y| \ge x^2 \\ 4\,\mathrm{sign}(y)\sqrt{|y|} + 4(x - \frac{|y|}{x})\cos\left(\frac{\pi \log x}{\log 2}\right) & \text{si} \quad |y| < x^2 \end{cases} ,$$

   (voir la Fig. I.7.2 de [HNW93]). La fonction $f(x,y)$ est continue sur $I\!R^2$.
   (a) Montrer que la suite des polygones d'Euler $\{y_h(x)\}$ ne converge pas pour $h \to 0$.
   (b) Calculer les points d'accumulation de la suite $\{y_h(x)\}$ où $h = 2^{-i}$, $i \ge 1$, et montrer qu'ils sont des solutions du problème de Cauchy.
   Indication. Les solutions sont $\pm 4x^2$.

16. Résoudre l'équation

$$\begin{aligned} x' &= -y + x(\epsilon - (x^2+y^2)) \\ y' &= x + y(\epsilon - (x^2+y^2)) \end{aligned}$$

en passant en coordonnées polaires. Discuter de l'allure des solutions en fonction de $\epsilon \in \mathbb{R}$. *Remarque.* Si $\epsilon > 0$ on a une solution qui est un cercle de rayon $\sqrt{\epsilon}$, puis lorsque ϵ devient négatif, ce cercle disparait, c'est une Bifurcation de Hopf (Fig. 10.1).

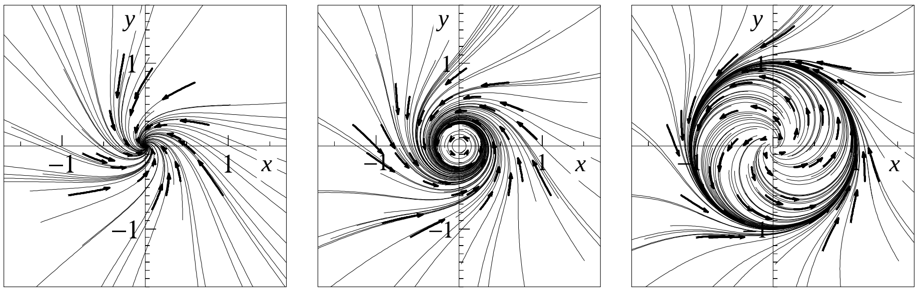


FIG. 10.1 – *Comportememt des solutions pour $\epsilon = -1$, $\epsilon = 0$ et $\epsilon = 1$.*

17. Pour la solution de l'équation de Ricatti

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1 ,$$

démontrer que

$$\frac{1}{1-x} \le y(x) \le \tan(x + \frac{\pi}{4}) .$$

Indication. Résoudre $u' = u^2 - \epsilon^2$ $(\epsilon \to 0)$ et $v' = v^2 + 1$.

18. On considère le problème

$$y' = \lambda y, \quad y(0) = 1$$

sur l'intervalle $[0,1]$ avec $\lambda > 0$. Démontrer que les polygones d'Euler $y_h(x)$ satisfont

$$\frac{\lambda}{1+\lambda h} y_h(x) \le D_+ y_h(x) \le \lambda y_h(x) .$$

En déduire que

$$\left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^n \le e^\lambda \le \left(1 + \frac{\lambda}{n}\right)^{n+\lambda} .$$

19. Démontrer le "lemme de Gronwall": S'il existe $L > 0$ tel que

$$m(x) \le \rho + \epsilon(x - x_0) + L \int_{x_0}^x m(t)dt \qquad \text{pour } x \ge x_0 ,$$

alors

$$m(x) \le \rho e^{L(x-x_0)} + \frac{\epsilon}{L}(e^{L(x-x_0)} - 1) .$$

Indication. Dériver une inégalité différentielle pour $u(x) := \rho + \epsilon(x - x_0) + L \int_{x_0}^x m(t)dt$.

20. Démontrer par un contre-exemple que l'affirmation (c.f. Théorème 5.2)

$$\left.\begin{aligned} m(x_0) &\le u(x_0) \\ D_+ m(x) &\le g(x, m(x)) \\ D_+ u(x) &\ge g(x, u(x)) \end{aligned}\right\} \implies m(x) \le u(x)$$

n'est pas vraie sans hypothèses additionnelles (voir l'Exemple 3.1).

21. On considère le problème

$$y' = 1 - \cos(xy), \quad y(0) = 0.1 . \tag{10.1}$$

(a) Montrer que (10.1) possède une solution unique sur $[0, \infty)$.

(b) Calculer une solution approchée en remplaçant $\cos(xy)$ par $1-(xy)^2/2$.
(c) Estimer la différence entre la solution exacte et la solution approchée sur l'intervalle $[0,1]$. La Fig. 10.2 illustre la solution exacte et approchée, on a une singularité pour la solution approchée en $x=60^{1/3}$.

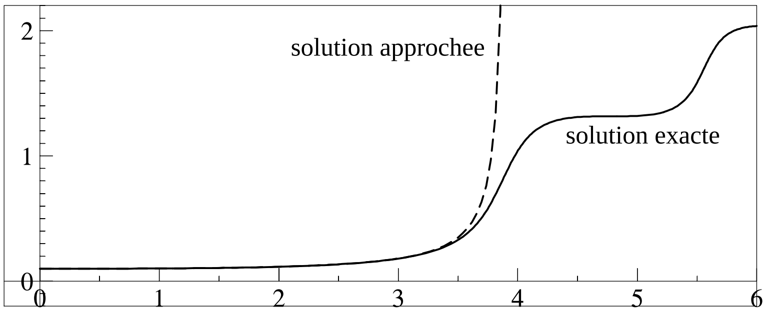


FIG. 10.2 – *Allure de la solution exacte et de la solution approchée*

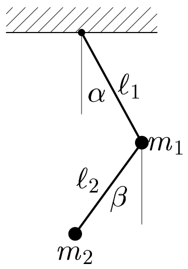
22. Démontrer que si $A(x)$ est une matrice antisymétrique ($A^T=-A$), alors la résolvante de
$$y' = A(x)y$$
est une matrice orthogonale.
Indication. Montrer que le produit scalaire de deux solutions est constant.
23. Calculer la résolvante (représentation réelle) de l'équation différentielle
$$\begin{aligned} y_1' &= \cos(x)y_1 - \sin(x)y_2 \\ y_2' &= \sin(x)y_1 + \cos(x)y_2 \ . \end{aligned}$$
Indication. Trouver une équation différentielle pour $z=y_1+iy_2$.
24. Soit
$$y' = A(x)y \tag{10.2}$$
où $A(x)$ est une matrice d'ordre n. Montrer que si l'on connait une solution non-triviale $\varphi(x)$ de (10.2), on peut réduire l'équation (10.2) à un problème analogue mais où la matrice est d'ordre $n-1$.
Indication. Si l'on suppose que $\varphi_1(x)\not\equiv 0$, chercher une solution de la forme $y=u\varphi(x)+z$, où u est une fonction scalaire et où z est de la forme $z=(0,z_2,\cdots,z_n)^T$.
25. A l'aide de l'exercice précédent, calculer la résolvante $R(x,1)$ de l'équation
$$y' = \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} y$$
sachant qu'elle admet $y(x)=(x^2,-x)^T$ comme solution.
Remarque. Le résultat est $\begin{pmatrix} x^2(1-\ln x) & -x^2\ln x \\ x\ln x & x(1+\ln x) \end{pmatrix}$.
26. A l'aide de l'exercice précédent, résoudre
$$y' = \begin{pmatrix} 1/x & -1 \\ 1/x^2 & 2/x \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}, \qquad y(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$
27. Calculer la solution générale de
$$y' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix} y .$$
Indication. $\lambda_1 = 1$ est une valeur propre.

28. Transformer la matrice
$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 14 & 4 & 2 \\ -2 & 20 & 1 \\ -4 & 4 & 20 \end{pmatrix}$$
sous forme normale de Jordan et calculer la résolvante de $y' = Ay$.
Indication. Toutes les valeurs propres de A sont égales à 2. La matrice T qui transforme A sous forme de Jordan est donnée par $T = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_3 \neq 0$ est arbitraire, $v_2 = (A-2I)v_3$ et v_1 est un vecteur propre de A différent de v_2.
29. Supposons que la matrice $A(x)$ soit continue sur l'intervalle I. Montrer que si les matrices $A(x)$ et $\int_{x_0}^{x} A(t)dt$ commutent pour tout $x_0, x \in I$, alors la résolvante de $y' = A(x)y$ satisfait
$$R(x, x_0) = \exp\left(\int_{x_0}^{x} A(t)dt\right) .$$
30. On considère le système
$$y' = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y . \tag{10.3}$$
    (a) Montrer que $A(x)$ et $\int_{x_0}^{x} A(t)dt$ ne commutent pas.
    (b) Calculer la resolvante de (10.3).
    (c) Montrer que dans ce cas particulier $R(x, x_0) \neq \exp(\int_{x_0}^{x} A(t)dt)$.
31. On suppose que $A(x)$ soit périodique de période p, c.à.d. $A(x+p) = A(x)$.
    (a) Montrer que si $\Phi(x)$ est une matrice fondamentale, il existe une matrice C telle que $\Phi(x+kp) = \Phi(x)C^k$ pour $k = 0, 1, 2\ldots$
    (b) Montrer que les valeurs propres de C ne dépendent pas du choix de $\Phi(x)$. Les valeurs propres s'appellent *multiplicateurs de Floquet.*
    (c) Montrer que pour chaque valeur propre λ de C, il existe une solution $y(x)$ de $y' = A(x)y$ qui vérifie $y(x+p) = \lambda y(x)$ pour tout x (solutions *quasi-périodiques*).
32. Soit le système
$$\begin{aligned} y' &= y(1-y) + z \\ z' &= z(1-z) . \end{aligned}$$
Pout $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ calculer les quantités suivantes:
$$\frac{\partial y}{\partial y_0}(x, x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial y}{\partial z_0}(x, x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial z}{\partial y_0}(x, x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial z}{\partial z_0}(x, x_0, y_0, z_0).$$
33. Soit l'équation différentielle
$$y' = \alpha y + \beta ,$$
avec α, $\beta \in I\!R$. Elle admet la solution $y(x) = -\beta/\alpha$. Malgré la régularité de la fonction $f(x,y) = \alpha y + \beta$, cette solution est discontinue en $\alpha = 0$. Comment réconcilier ce fait avec le théorème sur la dérivabilité par rapport aux paramètres?
34. Considérons l'équation du pendule
$$y'' + \sin y = 0 , \quad y(0) = \epsilon , \quad y'(0) = 0 ,$$
où l'amplitude ϵ est supposée petite. Montrer que la solution peut être écrite sous la forme
$$y(x) = \epsilon y_1(x) + \epsilon^2 y_2(x) + \epsilon^3 y_3(x) + O(\epsilon^4) .$$
Calculer $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$.
35. Calculer la résolvante $R(x, x_0)$ de l'équation
$$y' = \begin{pmatrix} 2/x & 1 \\ 3/x^2 & 3/x \end{pmatrix} y$$
pour x, $x_0 > 0$. Utiliser la transformation $t = \ln(x)$, $z_i(t) = x^{i-1} y_i(x)$.
Donner l'allure générale des systèmes différentiels de dimension ≥ 2 que l'on peut résoudre à l'aide de cette transformation.

36. Montrer que l'équation ($a_{ij} \in I\!R$)
$$y' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} y$$
est asymptotiquement stable si et seulement si
$$a_{11} + a_{22} < 0 \qquad \text{et} \qquad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0 \ .$$
37. Montrer que pour un système autonome $y' = f(y)$ le flot
$$\Phi_t \, : \, I\!R^n \to I\!R^n \ , \quad \Phi_t(y_0) = y(t, 0, y_0)$$
satisfait
$$\Phi_t \circ \Phi_s = \Phi_{t+s} \ .$$
38. Soit $y' = Ay$ où A est une matrice $n \times n$ avec des coefficients réels. Soit
$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$
le polynôme caractéristique de A. Montrer qu'une condition nécessaire pour la stabilité asymptotique de $y' = Ay$ est donnée par
$$a_1 > 0 \, , a_2 > 0 \, , \cdots , a_n > 0 \ .$$
39. On considère le polynôme $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$ à coefficients réels. Montrer que si
$$a_1 > 0, \quad a_3 > 0, \quad a_1a_2 > a_3$$
alors les racines λ_i du polynôme $p(\lambda)$ satisfont $\Re\lambda_i < 0$.
Indication. Etudier la condition sur les coefficients quand une racine de $p(\lambda)$ traverse l'axe imaginaire.
Remarque. Les conditions mentionnées sont également nécessaires, c'est un cas particulier du critère de Routh-Hurwitz.
40. Aider James Watt à résoudre son problème de stabilité pour son moteur à vapeur de locomotive. On a le système différentiel suivant:
$$\begin{aligned} \omega' &= k\cos(\varphi + \alpha) - F \\ \varphi'' &= \omega^2 \sin\varphi \cos\varphi - g\sin\varphi - b\varphi' \end{aligned}$$
avec $k, F, g, b > 0$, ω est la vitesse de rotation du moteur et l'accélération de φ est déterminée par la force centrifuge, poids et frotement [HNW93, p. 90–91].
Pour $\alpha = 0$, calculer le point d'équilibre et déterminer sous quelles conditions le point est asymptotiquement stable.
41. Calculer les solutions stationnaires de
$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1y_2^2 - 2y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_1^2y_2 \end{aligned}$$
et montrer que la solution nulle est stable.
Indication. Trouver $a > 0$ et $b > 0$ tels que la dérivée de $V(x) = ay_1^2(x) + by_2^2(x)$ soit non positive. (Une telle fonction s'appelle *fonction de Lyapunov.*)
42. Etudier la stabilité des quatre points critiques de l'équation différentielle (voir Fig. 9.2)
$$\begin{aligned} y_1' &= (y_1 - y_2)(1 - y_1 - y_2)/3 \\ y_2' &= y_1(2 - y_2) \ . \end{aligned}$$
43. (a) Montrer que
$$(\,y\,)_1'\, y_2' = (\,y\,)_2 - y_1 + (y_1^2 + y_2^2)^3 \sin(\frac{1}{y_1^2 + y_2^2})\,(\,y\,)_1\, y_2$$
possède dans chaques voisininages de l'origine, une infinité de solutions stables et une infinité de solutions instables.
Indication. Regarder l'équation différentielle en coordonnées polaires.
(b) Est-ce que la solution nulle est stable, asymptotiquement stable?

44. On considère l'équation $y'(x) = (A + B(x))y(x)$. Montrer que si les valeurs propres de A satisfont $\mathrm{Re}\lambda < 0$ et si $B(x) \to 0$ pour $x \to \infty$ alors l'équation différentielle est asymptotiquement stable.
Indication. Utiliser la démonstration du Théorème 9.9.

45. Pour le "pendule double" déterminer les équations du mouvement en utilisant le principe de Hamilton (voir Exercice II.19). Prendre les angles α et β comme coordonnées généralisées.



$$\begin{aligned} T &= \frac{m_1}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) \\ U &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \end{aligned}$$